高等学校教学参考书

应用图论

苗邦均 编

中国铁道出版社

1982年·北京

内容提要

本书为高等学校教学参考书。主要叙述图论的基本知识及其应用，在应用方面重点选编了与交通运输、信息传输有关的内容。全书共分七章，简要地介绍了图的基本概念、图的运算、图在电子计算机里的存储、图的圈和树、路径问题、极大流问题、随机网上的极大概以及最小费用、最优定址等内容。另外，为了便于读者学习，在第一章内还选编了集合论和矩阵的基本知识。本书供高等工科院校师生、研究生及工程技术人员、科研人员参考用。

高等学校教学参考书
应用图论
苗邦均编
中国铁道出版社出版
责任编辑 张显善
封面设计 翟达
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092毫 印张：9.75 字数：243千
1980年4月 第1版 1982年10月 第2次印刷
印数：10,001—13,000册 定价：1.05元

前　言

一、由于图论处理问题的方法的多样性和它的应用广泛性，要想把它的主要内容概括到一本书里是很困难的。本书只选编了与交通运输管理有关的内容，这些内容对信息传输也是直接有关的。

二、为了便于读者查阅图论所涉及的预备知识，本书选编了集合论和矩阵的基础知识，对于熟悉这部分内容的读者可以从第二章读起。

三、和其它数学分支一样，现在随机性图论正在发展之中。在这方面有两种趋向，其一是把图与马尔科夫链相联系，使之相辅相成；其二是借助统计方法研究随机网上的流，我们在第六章后选编了后一内容的一部分。但本书主要是讲确定性网。

四、图论的应用越来越多地依赖于电子计算机，因此我们选编了图的存储方式和某些计算的Fortran程序。然而不应有错觉：对有限图无须作理论研究，只须让电子计算机采用历数的方法求最优解。正确的途径是先由理论研究剔除绝对多数的不良解，而后令电子计算机求解；或者是先由理论研究确定出最优解的方法，而后令电子计算机去执行。

五、有些定义在引入之后，严格地论证了它们的性质，如割集和基本割集。一俟读者熟悉之后，则说法上常采用略语，当然以不致混淆为限。例如把基本割集略为割集。

另外，有些内容常出现在几种场合，如割集，顶点集的关联集，余圈等，乃是同一事物的不同侧面，读者应以掌握实质为中心。

六、本书虽然比较注意系统性和论证的严谨性，然而作为教学参考书，读者宜把注意力放在方法的实质内容上，不宜在论证上花过多的时间。

七、本书经长沙铁道学院李慰萱同志审阅，并得到长院应用数学研究室侯振挺和中国科学院数学所王光寅二同志的关怀，一并表示谢意。

苗邦均

1979.7

目　录

第一章　预备知识

第一节　集合论的有关知识

集合的概念是现代数学最基本的概念。构造性的集合论是实变函数、应用概率论的基础；而公理化的集合论不但是测度论、数学概率和布尔代数的基础，而且随着数理逻辑的不断发展，其重要性日益显著。集合论的发展，今天已普遍到这样的程度：很难找到一本近代数学书不用集合概念。图论也是广泛使用集合概念的。

一、集合及其运算

定义1.1：不论在纯数学还是在应用数学中，经常考虑具有某种特殊性质东西的全体，这样的全体就叫一个**集合**。我们总用一个大写字母表示集合。构成集合的每一个东西叫作集合的**元素**，简称元。为了把集合概念一目了然地表示出来，引入下列符号：

$$(\exists x)\ P$$

表示"存在具有性质P的个体x"，其中"$\exists$"叫作特称符号。

$$(\forall x)\ P$$

表示"对于所有x都有性质P"，其中"$\forall$"叫全称符号。具有特殊性质P的元素x的集合S表示为：

$$S=\{x;P(x)\}$$

a是S的元素，或a属于S可表示为：

$$a\in S$$

否则表示为

$$a\bar{\in} S$$

集合的元素可以是任何类型的东西。例如一组选定的点；全国各火车站；全国铁路各站间的所有区段；各区段的通过能力；全国铁路职工等等都是集合的例子。

关于集合的运算我们给出以下定义。

定义1.2：我们说集合A与B相等，记作

$$A=B$$

系指A与B有共同的元素。即$x\in A\Longleftrightarrow x\in B$〔符号"$\Longleftrightarrow$"称为等价符，两个命题$P_1$与$P_2$等价：$P_1\Longleftrightarrow P_2$表示$P_1$与$P_2$同真（成立）或同假（不成立）〕。

定义1.3：我们说集合A为集合B的子集，系指A中所有元均在B中：

$$a\in A\Longrightarrow a\in B$$

记为

$$A\subset B$$

（符号$\Longrightarrow$称为蕴涵符。命题P_1蕴涵P_2：$P_1\Longrightarrow P_2$。在本书范围内可理解为P_1成立时P_2必成立。其全部含义是，当P_1成立而P_2不成立时，$P_1\Longrightarrow P_2$为假，否则为真）。

定义1.4：不含任何元素的集合叫作空集，记为ϕ。须知只有一个元素零的集合：

$$A=\{0\}$$

不是空集。同样$\{\phi\}$含有一个元素ϕ，也不是空集。由于逻辑上的理由，规定任一集合均以空集为子集。

定义1.5：我们说集合A与B的并为集合C，系指C包含且只包含A和B中的元：

$$x\in C \Longleftrightarrow x\in A \text{或} x\in B(\text{至少有一个成立})。$$

记为

$$C=A\cup B$$

例1.1：

$$A=\{x: 0\leqslant x\leqslant 5\};\quad B=\{x: 3\leqslant x<7\}$$

则

$$C=A\cup B=\{x: 0\leqslant x<7\}$$

定义1.6：我们说集合A与B的交（集）为C，系指C包含且只包含A与B的公共元素：

$$x\in C \Longleftrightarrow x\in A \text{与} x\in B\ (\text{同时成立})。$$

记为

$$C=A\cap B$$

例1.2：设A与B为例1.1中的集合，则$C=A\cap B=\{x: 3\leqslant x\leqslant 5\}$

定义1.7：我们说集合A与B的差集为C，系指C包含且只包含属于A而不属于B的元素：

$$x\in C \Longleftrightarrow x\in A \text{与} x\notin B\ (\text{同时成立})。$$

记为

$$C=A-B$$

例1.3：对于例1.1中的集合A与B，$C=A-B=\{x: 0\leqslant x<3\}$，

又

$$C=B-A=\{x: 5<x<7\}$$

定义1.8：我们说集合A与B的对称差为C，系指

$$C=(A-B)\cup(B-A)$$

记为

$$C=A\triangle B$$

例1.4：对于例1.1中的集合A与B，

$$C=A\triangle B=\{x: 0\leqslant x<3\}\cup\{x: 5<x<7\}=\{x: 0\leqslant x<3\text{或}5<x<7\}。$$

定义1.9：设V为一个集合，以V的所有子集为元素的集合称为V的幂集合，记为$\mathscr{P}(V)$，特别ϕ与V本身均属于$\mathscr{P}(V)$：

$$\phi\in\mathscr{P}(V);\quad V\in\mathscr{P}(V)$$

此外对任一$A\in\mathscr{P}(V)$称

$$\overline{A}_V=V-A$$

为A（关于V）的补（集）。在不致混淆的条件下，为了方便用$\overline{A}$表示$\overline{A}_V$。

定义1.10：我们说集合C为A与B的**笛卡尔乘积**（或直积），系指

$$C=A\times B=\{(a,b);\ a\in A,\ b\in B\}$$

并称A与B为C的边界。

关于这些运算，我们指出下列性质。

性质1.1：交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A,\quad A\triangle B=B\triangle A$$

性质1.2：结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

性质1.3：分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

性质1.4：吸收律

$$(A\cap B)\cup A=A$$

我们在下边对分配律给出证明，其余各性质希望读者自己补出证明，借以熟悉这些性质。

证：　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

设：　$x\in(A\cup B)\cap C\overset{\text{定义1.6}}{\Longleftrightarrow}x\in A\cup B$与$x\in C$

$\overset{\text{定义1.5}}{\Longleftrightarrow}(x\in A$与$x\in C)$或$(x\in B$与$x\in C)$

$\overset{\text{定义1.6}}{\Longleftrightarrow}x\in(A\cap C)$或$x\in(B\cap C)$

$\overset{\text{定义1.5}}{\Longleftrightarrow}x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$

故得　$x\in(A\cup B)\cap C\Longleftrightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$

由定义1.2得知　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

再证　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

设　$x\in(A\cap B)\cup C\overset{\text{定义1.5}}{\Longleftrightarrow}x\in(A\cap B)$或$x\in C$

$\overset{\text{定义1.6}}{\Longleftrightarrow}(x\in A$与$x\in B)$或$x\in C$

$\overset{\text{定义1.5}}{\Longleftrightarrow}x\in(A\cup C)$与$x\in(B\cup C)$

$\overset{\text{定义1.6}}{\Longleftrightarrow}x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$

为了显示集合运算的直观意义，我们给出它们的图解。阴影部分表示运算结果（见图1—1）。

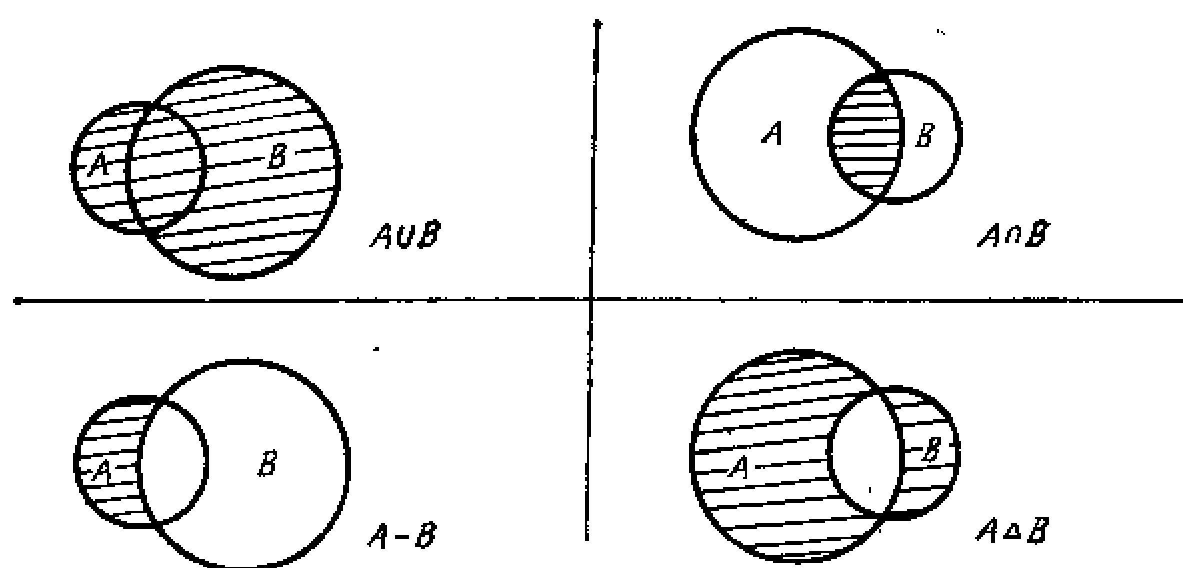


图1—1　集合运算的图解

性质1.5：De Morgan(狄摩根)公式

$$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B},\qquad \overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

$$\overline{\overline{A}}=A。\qquad A\cup\overline{A}=V,\ A\cap\overline{A}=\phi。$$

今证：
$$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

设：
$$x\in\overline{(A\cup B)}\overset{\text{定义1.9,定义1.7}}{\Longleftrightarrow}x\in V\text{ 与 }x\,\overline{\in}\,(A\cup B)\Longleftrightarrow$$
$$\overset{\text{定义1.5}}{\Longleftrightarrow}x\in V\text{与}(x\,\overline{\in}\,A\text{与}x\,\overline{\in}\,B)\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow(x\in V\text{与}x\,\overline{\in}\,A)\text{与}(x\in V\text{与}x\,\overline{\in}\,B)\Longleftrightarrow$$
$$\overset{\text{定义1.8}}{\Longleftrightarrow}x\in V-A\text{与}x\in V-B\overset{\text{定义1.9}}{\Longleftrightarrow}x\in\overline{A}\text{与}x\in\overline{B}$$
$$\overset{\text{定义1.6}}{\Longleftrightarrow}x\in\overline{A}\cap\overline{B}$$

故得
$$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

作为练习请读者补证出其余各条。

二、映射

定义1.11：我们说Γ是从集合A到B中的**一个映射**，系指Γ是一个对应关系或法则，使对任一$a\in A$，有B的子集Γ_a与之对应。记为

$$A\xrightarrow{\Gamma}B\qquad\text{我们也允许}\Gamma_a=\phi$$

如图1－2所示，其中$\Gamma_a=\{b_1,b_2,\cdots,b_k\}$，特别当$k=1$时，称映射Γ为单值的，记为

$$\Gamma_a=b\qquad\text{或}\qquad\Gamma(a)=b$$

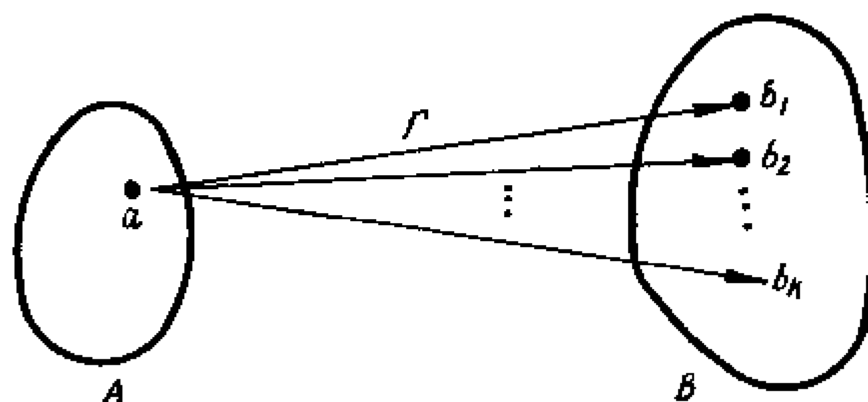


图1－2 映射

并说A为映射Γ的定义域，称$\Gamma(A)=\bigcup_{a\in A}\Gamma_a$为Γ的值域。一般来说$\Gamma(A)\subset B$，即$\Gamma(A)$为B的真子集。(A为B的真子集，系指：(1)A为B的子集；(2)$(\exists x)\ x\in B$但$x\,\overline{\in}\,A$)。特别当

$$\Gamma(A)=B$$

时，我们说Γ为从A到B**上**的映射。

定义1.12：我们说两个映射Γ_1与Γ_2相等

$$\Gamma_1=\Gamma_2$$

系指Γ_1与Γ_2有共同的定义域A，和共同的值域$\Gamma_1(A)=\Gamma_2(A)$，而且对于任一$a\in A$

总有
$$\Gamma_1(a)=\Gamma_2(a)$$

定义1.13：若$A\xrightarrow{\Gamma}B$，且对任一$a\in A$总有$\Gamma(a)=b_0$ 则称Γ为以b_0为值的**常值映射**。若$A=B$，而且对任一$a\in A$

总有 $$\Gamma_{\circ}=a$$
则称Γ为**恒等映射**，用I_A来表示。

定义1.14： 设$A\xrightarrow{\Gamma}B$，若Γ是单值的，且由$\Gamma(a)=\Gamma(a')\Longrightarrow a=a'$，则称$\Gamma$为**1－1对应的映射**，若$\Gamma$是从A到B上的1－1对应的映射，则称$\Gamma$为**完全的1-1对应的映射**

定义1.15： 若Γ为从集合A到B上的完全1－1对应的映射，我们定义Γ的**逆映射**Γ^{-1}如下：

对任一$b\in B$，定义$\Gamma^{-1}(b)=a$

其中$a\in A$，$\Gamma(a)=b$。易见Γ^{-1}的定义域与值域恰分别为Γ的值域和定义域。

定义1.16： 设$A\xrightarrow{\Gamma_1}B$，$B\xrightarrow{\Gamma_2}C$，定义由A到C的映射$\Gamma=\Gamma_2\circ\Gamma_1$如下：

对任一$a\in A$，$\Gamma(a)=(\Gamma_2\circ\Gamma_1)(a)=\Gamma_2[\Gamma_1(a)]$并称$\Gamma_1\circ\Gamma_2$为$\Gamma_1$与$\Gamma_2$的**复合映射**。

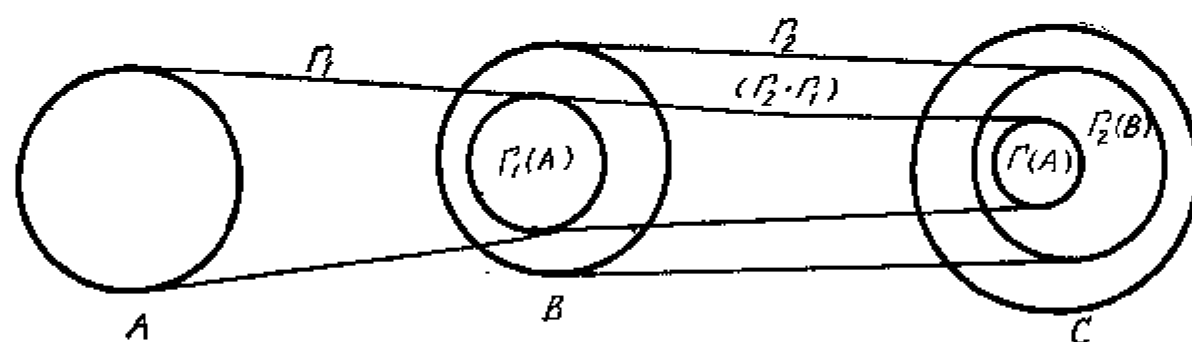


图1－3　复合映射

定义1.17： 设$A_1\subset A$，并有$A\xrightarrow{\Gamma}B$，$A_1\xrightarrow{\Gamma_1}B$。若对任一$a_1\in A_1$总有$\Gamma(a_1)=\Gamma_1(a_1)$则称$\Gamma_1$为$\Gamma$在$A_1$上的**限制**；反之称$\Gamma$为$\Gamma_1$在A上的**扩张**，记为$\Gamma_1=\Gamma|A_1$

定义1.18： 设$A\xrightarrow{\Gamma}B$，由此定义

$$\mathscr{P}(A)\xrightarrow{\widetilde{\Gamma}}\mathscr{P}(B)；X\in\mathscr{P}(A)\text{时},\widetilde{\Gamma}(X)=\{\Gamma(a)：a\in X\}\in\mathscr{P}(B)$$

及

$$\mathscr{P}(B)\xrightarrow{\widetilde{\Gamma}^{-1}}\mathscr{P}(A)；Y\in\mathscr{P}(B)\text{时},\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y)=\{x：\Gamma(x)\in Y\}\in\mathscr{P}(A)。$$

性质1.6： 设X_1，$X_2\in\mathscr{P}(A)$，Y_1，$Y_2\in\mathscr{P}(B)$则

1. $X_1\subset X_2\Longrightarrow\widetilde{\Gamma}(X_1)\subset\widetilde{\Gamma}(X_2)$；
2. $\widetilde{\Gamma}(X_1\cup X_2)=\widetilde{\Gamma}(X_1)\cup\widetilde{\Gamma}(X_2)$；
3. $\widetilde{\Gamma}(X_1\cap X_2)\subset\widetilde{\Gamma}(X_1)\cap\widetilde{\Gamma}(X_2)$；
4. $Y_1\subset Y_2\Longrightarrow\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_1)\subset\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_2)$；
5. $\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_1\cup Y_2)=\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_1)\cup\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_2)$；
6. $\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_1\cap Y_2)=\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_1)\cup\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_2)$；
7. $\widetilde{\Gamma}^{-1}(\overline{Y}_1)=\overline{\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_1)}$。

注：我们从Γ诱导出来的$\widetilde{\Gamma}$及$\widetilde{\Gamma}^{-1}$，为书写上的方便计，在不致混淆的条件下，仍写为Γ及Γ^{-1}。

作为练习请读者首先从直观上掌握上列各性质，而后给出论证。试找出两个具体的X_1与X_2使$\Gamma(X_1\cap X_2)\neq\Gamma(X_1)\cap\Gamma(X_2)$。

定义1.19：我们说A_1，A_2，…A_k为集合A的一个分割，系指

（1）对任何不同的i,j　　　$A_i \cap A_j = \phi$；

（2）　　　$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$。

三、基数（势）

我们的图论主要讨论有限图，偶然涉及可列情况。因此我们的基数或势至多为可列情况。所谓基数是源于个数的数学概念，详述于下。

定义1.20：我们说集合A与B是等价的，系指存在一个从A到B上的完全1－1对应的映射。记为A～B。

练习1：试举出三对等价集。

性质1.7：

（1）A～A；

（2）若A～B⟹B～A；

（3）若A～B与B～C⟹A～C。

证明：

（1）取$\Gamma(a)$为A上的恒等映射：$I(a)=a$，则$I(a)$为A到A上的完全1－1对应的映射。

（2）因为A～B，故存在A到B上的完全1－1映射$\Gamma(a)$。

由定义1.15可知$\Gamma^{-1}(b)$为从B到A上的完全1－1映射。

（3）因为A～B与B～C，故存在完全1－1对应的映射Γ_1与Γ_2：

$$A \xrightarrow{\Gamma_1} B,\quad B \xrightarrow{\Gamma_2} C。$$

易见$\Gamma=\Gamma_2 \circ \Gamma_1$为从A到C上的完全1－1映射。

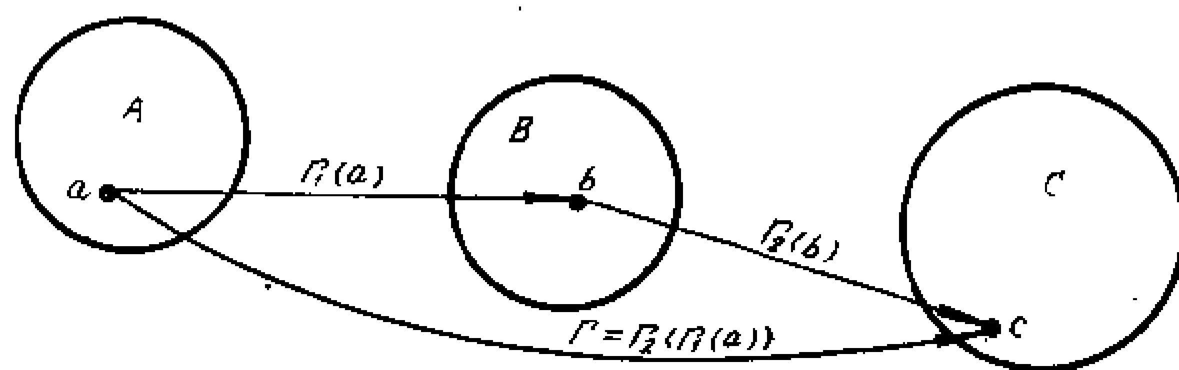


图1－4　复合映射

定义1.21：凡集合A与集合B等价，我们就说它们有共同的基数或势。A的势记为$|A|$，于是由A～B，则得$|A|=|B|$。

基数或势是表示集合中元素多少的指标，当两个集合等价时，则可以说它们有一样多的元，从而它们有共同的势。集合$S=\{a_1, a_2, \cdots a_n\}$的势为$n$；记为$|S|=n$。势$|S|<\infty$的集合S称为**有限集合**。凡与S等价的集合的势显然也是n。

定义1.22：令$I=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$。

凡与I等价的集合均称为可数集。集合A可数的充分必要条件是可排为

$$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$$

第二节　矩阵的有关知识

矩阵和置换群对图论的发展起着巨大作用，然而我们只把这些作为方法。为便于不熟悉这些内容的读者能顺利掌握图论本身，免得各处查找矩阵的有关公式和基本概念，我们在这里提供矩阵的最基本的常识。

一、矩阵及其运算

定义1.23：$m\times n$阶矩阵，系指排列为m行n列的数字或元素组成的矩形：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

或简写为　$A=[a_{ij}]$，当需要强调矩阵的阶数时，将A改为A_{mn}。除非有特殊说明，总设元素a_{ij}为实数。

定义1.24：两个矩阵A和B称为相等，系指它们的阶数相同，而且对一切i，j总有：$a_{ij}=b_{ij}$。

特别称A_{nn}为方阵。

定义1.25：

（1）设$A=[a_{ij}]$，对任意常数c，定义$cA=[ca_{ij}]$，

$$Ac=[a_{ij}\cdot c]；$$

（2）设A与B有相同的阶：$A_{mn}=[a_{ij}]$；$B_{mn}=[b_{ij}]$。定义它们的和为$C=[c_{ij}]$，系指对一切i、j，$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$记为

$$C=A+B；$$

（3）设$A_{mr}=[a_{ij}]$，$B_{rn}=[b_{ij}]$。定义它们的积为$C_{mn}=[c_{ij}]$，系指对一切i和j：$c_{ij}=\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kj}$记为

$$C=A\cdot B；$$

（4）我们说矩阵$A_{mn}=[a_{ik}]$的转置为$A'_{nm}=[a'_{ji}]$，系指对一切i与j总有：

$$a_{ij}=a'_{ji}。$$

性质1.8：关于矩阵的上列运算有下列性质，特别需要指出的是乘法一般没有交换律：

（1）结合律　　$(A+B)+C=A+(B+C)$；

$$(AB)C=A(BC)。$$

（2）分配律　　$C(A+B)=CA+CB$；

$$(A+B)C=AC+BC。$$

（3）交换律　　$A+B=B+A$。

（4）转置律　　$(A')'=A$；　　$(A+B)'=A'+B'$；

$$(AB)'=B'A'。$$

定义1.26：元素a_{11}，a_{22}，a_{33}，…，a_{nn}叫作方阵$A_{nn}=[a_{ij}]$的主对角线元，或说它们

构成方阵的**主对角线**。

若方阵$A_{nn}=[a_{ij}]$的元关于主对角线对称：$a_{ij}=a_{ji}$，则说此方阵为**对称的**。

练习2：设A为一个对称方阵，则$A'=A$。对任一矩阵A_{mn}总有AA'和$A'A$是对称方阵。

定义1.27：若对称方阵，除主对角线上的元之外均为零，则称为对角矩阵。若对角矩阵的主对角线元均为单位1，则称为单位矩阵，记为I。

练习3：若D_{mm}、D_{nn}为对角矩阵，则$D_{mm}A_{mn}$可由A_{mn}的各行以D_{mm}相应的主对角线元相乘得：$D_{mn}A_{mn}=[b_{ij}]$时 $b_{ij}=d_{ii}\cdot a_{ij}$，其中$d_{ii}$为$D_{mm}$的主对角线元。同理可证$A_{mn}D_{nn}=[c_{ij}]$时，$c_{ij}=a_{ij}\cdot d_{jj}$。由此推知$A=A_{mn}$时，$IA=AI=A$。

定义1.28：只有一行或只有一列的矩阵叫**矢**（**或矢量**）：$\mathbf{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$叫**行矢**；$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)'$叫**列矢**，简记为$\mathbf{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}$。若$\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$及$\mathbf{y}=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$为二列矢，则

$$\mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,$$
$$\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

为1×1阶矩阵，即纯数。而

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}'=[x_iy_j]_{nn}$$

为$n\times n$阶矩阵。今后如无特殊说明，总设$\mathbf{x},\mathbf{y}\cdots$为列矢。

二、线性变换与二次型

定义1.29：我们说同阶的矢量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，…，$\mathbf{x}_p$是线性相关的，系指存在不全为零的数c_i使

$$c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+\cdots+c_p\mathbf{x}_p=0$$

等号右边是与诸x_i同阶的零矢量，即各元素均为零的矢量，否则称$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，…，$\mathbf{x}_p$为线性独立的。

定义1.30：线性变换

$$x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n,$$
$$x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_m=a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{mn}y_n。$$

在n维空间的点$\{y_1,\ y_2,\cdots,y_n\}$与m维空间的点$\{x_1,\ x_2,\cdots x_m\}$之间建立起一种关系，此处m与n不必须相等。常称矩阵$A=A_{mn}=[a_{ij}]$为变换矩阵。则由矩阵运算定义1.25可知上列变换可写为

$$\mathbf{x}=A\mathbf{y}$$

定义1.31：设$\mathbf{x}$与$\mathbf{y}$独立，$A_{mn}=[a_{ij}]$则称

$$\mathbf{x}'A\mathbf{y}=\sum_{i,j}x_ia_{ij}y_j$$

为变数x_i与y_j的双线性型。特别当$m=n$，$\mathbf{x}=\mathbf{y}$而A为对称时，称

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x}=\sum_{i,j=1}^{n}x_ia_{ij}x_j$$

为变数x_1，x_2，…，x_n的二次型，记为Q(x)或Q(x_1，x_2，…x_n)。用矩阵表示为Q(x)＝x′Ax，对称矩阵A也叫作二次型Q的矩阵。

性质1.9：设有二次型$Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x'Ax$，及线性变换$x=C_{nm}y$则当令

$B_{mm}=C'AC$时，

$$Q_1(y_1, y_2, \cdots, y_m)=y'B_{mm}y$$

为新变量y_1，y_2，…y_m的二次型。这是由于$B_{mm}=[b_{ij}]$时，

$$b_{ij}=\sum_{k,l} c'_{ik}a_{kl}c_{lj}$$

因为$c'_{ik}=c_{ki}$，$a_{kl}=a_{lk}$

故
$$b_{ij}=\sum_{k,l} c'_{jl}a_{lk}c_{ki}=b_{ji}$$

所以B_{mm}为对称的。

三、线性方程

定义1.32：方阵$A_{nn}=[a_{ij}]$的行列式是记为以下形式的一个数：

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|a_{ij}|$$

|A|的定义是$|A|=\Sigma\pm a_{1r_1}, a_{2r_2}\cdots a_{nr_n}$，这里求和是对$r_1, r_2, \cdots r_n$的一切可能排列取的。为了说明“＋”、“－”号的取法，我们先看一个实例。当用x_1代x_2，用x_2代x_1，用x^3代x_4，用x_4代x_3时，我们把这种排列写为（这里$n=4$）：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

或记为（1,2）·（3,4）。对于有限个元的排列易见总可以表示为有限个轮换[(1,2)及(3,4)各叫一个轮换]之积。排列r_1，r_2，…r_n，依照其轮换因子有偶数个或奇数个，而称为偶排列或奇排列。当r_1，r_2，…，r_n为偶排列时a_{1r_1}，$a_{2r_2}\cdots a_{nr_n}$取正号；为奇排列时取负号。

性质1.10：关于方阵的行列式有下列性质：

（1）A的转置矩阵的行列式与A的行列式相同，即

$$|A'|=|A|$$

（2）若A的两行或两列互换位置，则其行列式变号。从而可知当A有两行或两列相同时，其行列式必为零。

（3）若方阵B与C之积为方阵A：A＝B·C则有

$$|A|=|B|\cdot|C|$$

定义1.33：设A为一矩阵（不一定为方阵），A的子方阵的行列式叫作A的**子式**。若A为方阵，则当其子式的对角线元均为A的主对角线元时，称为A的**主子式**。

若$A=[a_{ij}]$为一方阵，将a_{ij}所在的行和列由A中删除，所得子式乘以$(-1)^{i+j}$之后，叫作a_{ij}的余子式，记为A_{ij}。

性质1.11：关于余子式有下列展式：

（1）
$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij}=\begin{cases}|A| & 如果k=i\\ 0 & 如果k\neq i\end{cases}$$

（2）
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ij}=\begin{cases}|A| & 如果\ k=j\\ 0 & 如果\ k\neq j\end{cases}$$

定义1.34：矩阵A的秩是满足下列条件的整数$r=r(A)$：

（1）存在A的一个r阶不为零的子式；

（2）不存在A的大于r阶的不为零的子式。

由此定义可知$A=A_{mn}$的秩数r满足条件：

$$r\leqslant \min\{m,n\}$$

性质1.12：我们把A的行或列，常看作矢。若A的秩为r，则必可找出A的r个线性独立的行，同时A的任意$r+1$行都是线性相关的。对列有同样的性质。

性质1.13：若方阵的行列式不为零，$|A|\neq 0$，则A的秩必为n。若$|A|=0$则A的秩必小于n。依照$|A|=0$或$|A|\neq 0$，而称方阵A为奇异的或非奇异的。

若$|A|\neq 0$而B为任一矩阵，则AB及BA的秩与B相同。

定义1.35：设$A=[a_{ij}]$为一方阵，设A_{ij}为a_{ij}的余子式，令$A^*=[a^*_{ij}]$，其中$a^*_{ij}=A_{ji}$，则称A^*为A的伴随转置矩阵。

即

$$AA^*=A^*A=|A|I=\begin{bmatrix}|A| & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |A| & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & |A|\end{bmatrix}$$

若A非奇异则方阵$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*=\left[\frac{A_{ji}}{|A|}\right]$称为A的**逆阵**。

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$$

性质1.14：逆阵有下列性质：

（1）$[A^{-1}]^{-1}=A$；

（2）$[A^{-1}]'=[A']^{-1}$；

（3）$[AB]^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$；

（4）设D为以λ_1，$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为对角元的非奇异对角方阵，则$D^{-1}$也是对角方阵，其对角元依次为$\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$。

定义1.36：设方阵$C=[c_{ij}]$使$C\cdot C'=C'\cdot C=I$，则称C为**正交方阵**。

性质1.15：正交方阵有以下性质：

（1）$|C|=\pm 1$；

（2）$C^{-1}=C'$；

（3）$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}c_{kj}=\delta_{ik}$（其中$\delta_{ik}$只当两足码相等时为1，否则为零，称它为柯若尼柯符号）。

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} c_{ik} = \delta_{jk};$$

（4）设C_1及C_2为二同阶正交方阵，则$C = C_1 \cdot C_2$也是正交的；

（5）对于任一自然数$p < n$，和p个行矢$(c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in})$，$i = 1, 2, \cdots, p$，只要它们满足上列性质（3），就可以找到另外的$n - p$个行矢，使它们一起组成的$n \times n$阶矩阵为正交的。

定义1.37：线性变换$x = Cy$，当矩阵C为正交的时候，叫作正交变换。

性质1.16：正交变换的性质为保持距离不变。因为$x = Cy$，$x' = y'C'$，所以
$x' \cdot x = y'C'Cy = y'Iy = y' \cdot y$。

即对于任一x恒有：　$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$。

性质1.17：设A为任一对称方阵，则必有正交方阵C，使$C'AC$为一对角矩阵：

$$C'AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

而且任一使A变为对角矩阵的正交矩阵都有相同的对角线元，可能它们的排列顺序不同。所以对角线诸元λ_1，λ_2，$\cdots \lambda_n$是A所特有的，称为A的**固有值**，它们是下列n次方程的实根。

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

由此可见A的秩为其非零固有值的数目。

第二章　图的基本概念

第一节　历 史 概 况

图的理论已经取得了非凡的发展，据统计现在以每年400篇文献的速度向前发展着，其应用之广泛也是少有的。它在电信、交通网络方面；在物理学、化学和数学的其它分支方面；甚至在经济、建筑和社会学等方面，也都有广泛应用。

图论之所以能高速发展是有其来由的。首先是图论模型有广泛的适用性，二是图论的图解表达式直观而清晰；三是由于图论与其它科学的广泛联系，特别是与其它数学分支的密切联系，从而能吸取各方面的研究方法。

但是要准确地追溯图论的起源，那也是困难的。按现有记载，图论的先驱者有欧拉（Euler），他在1736年解决了当时闻名的葛尼西堡七桥问题。因此有人认为欧拉应该是拓扑学和图论的奠基人。七桥问题的数学实质是要证明图2—1不是一笔画（即从某点开始经过各条线恰好一次再回到起点）。

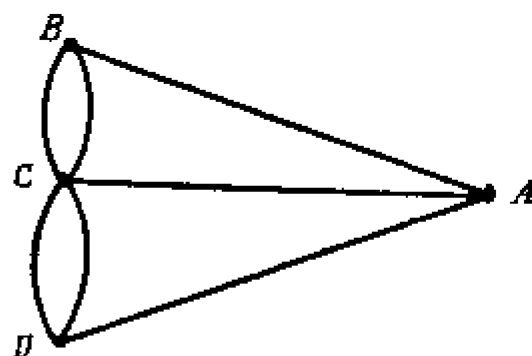


图2—1　七桥

1847年，基尔赫夫（Kirchhoff）在研究电网时奠定了树的概念和理论。基尔赫夫是一位卓越的物理学家，但他极善于抽象思维。他为了探索方程组的互独立方程的个数，他把电路中的电器统统看作是电路的一部分，而无视它们的电学特征。以后他用只有点和线段的受检图来代替原来的电路，并在受检图上逐步删除线段，一直到使受检图变为一棵树为止。于是他得到如下的结论：独立方程的个数等于删除的线段数，而且对应于每一被删线段有唯一的一个基本圈和与此圈相应的一个方程。

1857年，著名的化学家开勒（Cayley）在研究同分异构体的结构时，独立地引入了树形图。我国著名化学家唐敖庆教授把图论应用于化学也取得了一系列成果。

第一次从数学上考虑树的是若当（Jordan）在1868年的工作。

四色问题早在1840年就为人们熟知：平面或球面上任何一张地图，用四种颜色就可以画清楚，而且保证两个相邻的国家都染有不同的颜色，条件是每个国家必须是单连通的，而所谓相邻是指有一条公共边界。1969年奥瑞（Ore）和斯太姆普（Stemple）证明了对于40个顶点以下的平面图四色定理成立。四色问题在1976年已由美国伊利诺大学柯·阿派尔（K·AppeL）、喔·哈肯（W·Haken)在寨·考贺（J·Koch）协作之下，利用高速电子计算机得到解决。它用了100亿个逻辑判定，花了1,200机时，因此作为对这定理的证明并不理想，但无论如何算是解决了一大难题。

图的理论，作为独立的学科而有其自身的发展，主要是靠占有大量实用问题的运筹工作者的创造。因此绝大多数图论著作并非出自数学工作者，只有为数不多的数学家发表了他们的图论专著。例如“图论”的作者弗朗柯·亨瑞（Frank·Harary）及“图的理论及其应

用”的作者柯芳德·贝热（其新著“图和超图”在1973年发表）均为数学家。

图论这门科学，目前主要是用来处理有限系统，即便如此，在付诸应用时的计算工作也是极为浩繁的，所以它与电子计算机的联系日益密切。甚至有的著作中主要篇幅是讨论图在电子计算机里的存储方式及从最优化程序的角度处理图论的各种方法，并给出实现程序。我们将在第三、四章给予讨论。

图的主要内容之一为研究各种网络，如铁路网、信息网以及各种公用设施网。须知任何网络的任何一段都可能由于以下原因而不能确保提供使用：一是由于偶然性的故障；二是它被占用。也就是说把网络看作是随机性的更为符合实际情况。从而近年来与确定性网络并行地发展了随机性网络，我们在第六章中予以介绍。

第二节　图论模型实例

图论之所以应用广泛，可以这样来说明：任何一个能用双边关系描述的体系，都可以用图来提供数学模型。我们这一节的任务在于直观地提供一些图的例子，借以说明什么是图？图论的主要内容是什么？这样我们在转入严格定义时就有了初步的感性基础。

例2.1：全国铁道线路连同所有火车站是一个图。所以一个图就是一些点子和它们之间的一些连接线段之综合体。一个图可以是连成一片的，也可以是几片，我国全国铁路图就是由两片组成的，一片为祖国大陆上的路网，另一片为台湾省路网。

例2.2：图２－２中A，B，C，D，E，F，G，H、K表示九个仓库，其间的连线表示道路，这也是一个图。为安全计，夜间派有巡回保卫小组，试为他们选定两个仓库（答案是K和D）作为休息地点，并为他们制订巡回路径，使从一个休息地出发将每条道路恰走一遍，最后到另一休息地休息。

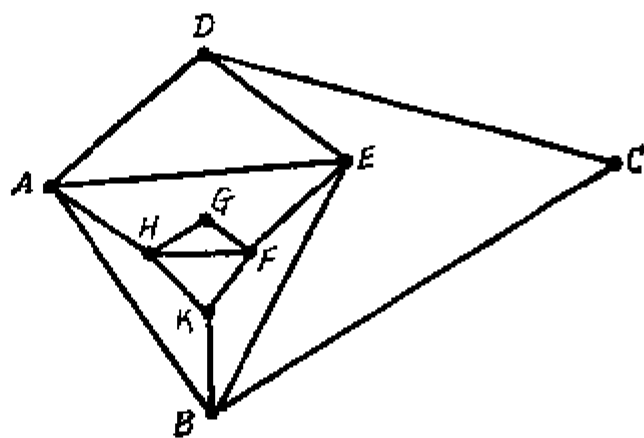


图２－２　欧拉图

例2.3：在例2.2中，若要求保卫人员坐在一条路上，使他能看到两端的仓库，问最少要布置几位守卫者？如何安排其位置？

通过上面的实例，我们大致可以想象到图的研究内容，就其要者略述于下：

1．在图上的两点间找出一条路来，如例2.2所示；

2．在两点间找出满足特定条件的路径来，例如最短路径，以及把一种货物从图上的一点运往另一点时，需要找出具有最大流量的路径，或是运费最低的路径，或是游遍图上各点的路径等等；



图２－３　图式

3．讨论分配问题，例如按人们的不同专长，机械的不同性能适当地分配他们的工作。例2.3说明人与地址的最佳配对问题。这对继电器理论也是很重要的；

4．以上三个例子容易给人这样一种印象，似乎图是实际问题本身自然呈现出来的。其实不然，例如在某种竞赛中总要选出一位优胜者，我们可以用图来提供一种模型。把每个参加比赛者当作一个点，把对垒的一对竞赛者A和B用矢连接起来，表示“A胜B”。这样就得到一个图２－３，按竞赛规则从图上可以一目了然地看出优胜者。

第三节　图的基本概念

本段给出图和有关的常用定义，为便于后继部分的开展，我们希望读者在本段多用些时间，把实例和定义对照着反复熟练地思考。

直观地讲，一个图就是在一个点集里，按照某种法则，在它们之间连接有向或无向线段所得的图形。

定义2.1：设$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$为一集合，其中的元叫作**顶点**；$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$为笛卡尔乘积空间$V\times V$的一个元素组（其中可能有相同的，见定义1.10），其中的元叫**弧**。称二元组(V,U)为一个**有向图**，记为

$$G=(V,U)$$

顶点个数$n=|V|$叫作**图的阶**；对于从v_i到v_j的一条弧$u=(v_i,v_j)$称v_i为弧u的**起点**，v_j为**终点**。起点与终点相合的弧叫作**环**。今后把有环的图叫**伪图**，若图中有共同起点和终点的弧最多有p条，则称此图为一个p-**图**，见图2—4和图2—5。以下我们总把"图"理解为无环图，若有例外，必在图前加上相应的定语。有时把图G叫作(n, m)图（意思是有n个顶点、m条弧的图）。

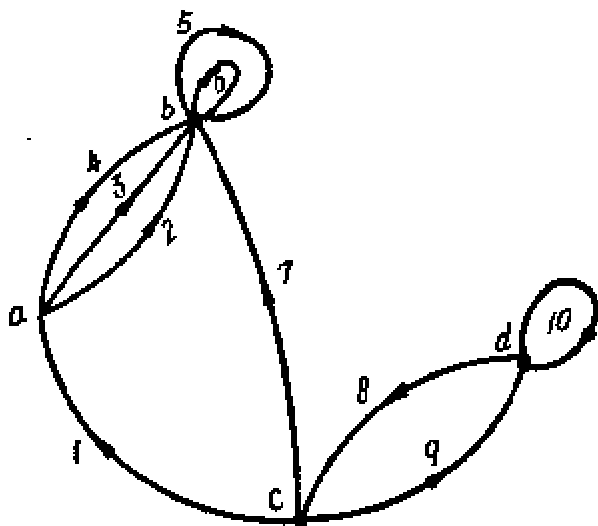


图2—4　4阶、伪、3-图

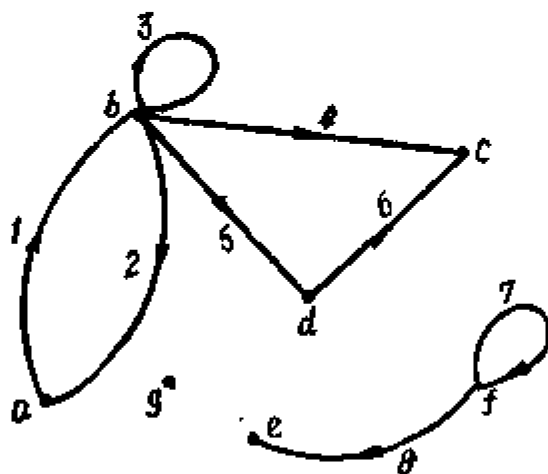


图2—5　6阶、伪、1-图

图2—4和图2—5中各弧上的数字r为u_r的简写。在图2—4中$u_5=(b, b)$，$u_6=(b, b)$和图2—5中的$u_3=(b, b)$均为环。图2—4中弧u_2、u_3及u_4有共同起点a及终点b，而且任何四条弧都没有共同的起点和终点，因此图2—4是3—图。

定义2.2：设$G=(V,U)$，$v\in V$定义集合

$$\Gamma_G^+(v)=\{x;\ x\in V,\ (v,x)\in U\}$$
$$\Gamma_G^-(v)=\{x;\ x\in V,\ (x,v)\in U\}$$
$$\Gamma_G(v)=\Gamma_G^+(v)\cup\Gamma_G^-(v)$$

称$\Gamma_G^+(v)$中元为v的**后继元**；$\Gamma_G^-(v)$中元为v的**先行元**；$\Gamma_G(v)$为顶点v在G中的**邻域**。当$\Gamma_G(v)=\phi$时，称v为G的**孤立点**。

例2.4：对于图2—4 $\Gamma_G^+(a)=\{b\}$，$\Gamma_G^+(b)=\{b\}$，$\Gamma_G^+(c)=\{a, b, d\}$，$\Gamma_G^+(d)=\{d, c\}$。$\Gamma_G^-(a)=\{c\}$，$\Gamma_G^-(b)=\{a, b, c\}$，$\Gamma_G^-(c)=\{d\}$，$\Gamma_G^-(d)=\{c, d\}$。$\Gamma_G(a)=\{b, c\}$，$\Gamma_G(b)=\{a, b, c\}$，$\Gamma_G(c)=\{a, d, b\}$，$\Gamma_G(d)=\{c, d\}$。对于图2—5有$\Gamma_G^+(e)=\Gamma_G^+(g)=\phi$，$\Gamma_G^-(g)=\phi$，所以$\Gamma_G(g)=\phi$。

注意，Γ_G^+是图G的顶点集V到其自身V的一个多值映射：$v \longrightarrow \Gamma_G^+(v)$。当$\Gamma_G^+(v)=\phi$时，即顶点$v$在图中无后继元时，称$v$为G的终点，G的全体终点集合记为$T_G$：

$$T_G=\{v:\ v\in V,\ \Gamma_G^+(v)=\phi\}$$

称集合

$$S_G=\{v:\ v\in V, \Gamma_G^-(v)=\phi\}$$

为图G的**起点集**。

试观察图2—4、图2—5及图2—6的T_G及S_G集合，图2—6中的图属于一种叫树的图类，这种图在图论的理论研究和应用上均具有极为重要的地位。并证明$\Gamma_G(v)=\phi$的充分必要条件是$v\in T_G\cap S_G$。

对任一子集$A\subset V$，定义

$$\Gamma_G^+(A)=\bigcup_{v\in A}\Gamma_G^+(v)；\ \Gamma_G^-(A)=\bigcup_{v\in A}\Gamma_G^-(v)；\ \Gamma_G(A)=\bigcup_{v\in A}\Gamma_G(v)。$$

$$P_G^+(A)=\Gamma_G^+(A)-A；\ P_G^-(A)=\Gamma_G^-(A)-A；\ P_G(A)=\Gamma_G(A)-A。$$

并称$P_G^+(A)$为A在G中的纯后继元的集合，$P_G^-(A)$为A在G中的纯先行元的集合，$P_G(A)$为A在G中的纯邻域。

在图2—6中取$A=\{v_2,v_3,v_4\}$，则$P_G(A)=\{v_1,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$。对于1-图而言，任何两个不同的弧、它们的起点或终点至少有一对是不同的。因此$U=\{u_1,u_2,\cdots u_m\}$中的元均为不同的有序顶点对。所以1-图$G=(V,U)$，由V及$\Gamma=\Gamma_G^+$可以完全决定，故1-图今后也记为$G=(V,\Gamma)$。

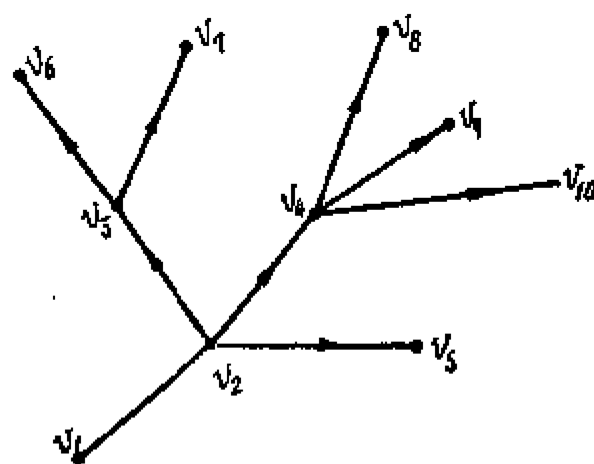


图2—6 树

按图的实际背景，分为有向图、无向图和混合型图三种，有向图即每一弧均有特定的方向，例如弧$u=(x,y)$与弧$u'=(y,x)$是不同的，前者的起点为x，终点为y，弧的走向是从x到y；而弧$u'=(y,x)$则恰好相反。又如在一个闭合电路中，任何两个结点之间的电流有确定的走向，所以一个闭合电路应为一个有向图。再例如铁路的双轨线路部分为有向图，因为上行（即向北京方向）线与下行线（远离北京的方向）上车流的方向是固定的。另一种图为无向图，即图上任何二点间只要有连线，那么两个方向都可以使用，例如北京市的市内电话线路网，就是无向图；铁路的单轨线路图也是无向的。还有一种就是混合型图，即图上有的部分有向，另一部分为无向，例如全国铁路网就是一个混合型图。

定义2.3：若将图中弧的方向取消，则称为**边**。由顶点集V及边e的集合$E=[e_1,e_2,\cdots,e_m]$所构成的二元组叫**无向图**，记为（V,E）。以v_i及v_j为顶点的边记为$[v_i,v_j]$。与有向图相应可定义无向伪图及p-无向图，或叫多重图。无向1-图也叫**单纯图**。

我们把图分为有向与无向，并非性质上的本质差别，而是为了便于叙述。实因无向图G可以用有向图$\vec{G}$来表示，其中$\vec{G}$是将G边$[x,\ y]$换为两条弧(x,y)及(y,x)而得。今后在不涉及弧的方向的问题中，常把弧改为边。弧和边统称为线。

定义2.4：如果两条线至少有一个共同的端点，则称它们相邻。两个顶点，若它们是一条线的两个端点，则叫作**相邻**。

在无向图中用$\Gamma_G(v)$记与v相邻点的集合，按上面所说的观点，这种记法与本章定义2是一致的。

定义2.5：图G的弧(x,y)的重数，系指以x为起点、y为终点的弧的数目，记为$m_G^+(x,y)$。

并定义：

$$m_G^-(x,y)=m_G^+(y,x);$$
$$m_G(x,y)=m_G^+(x,y)+m_G^-(x,y).$$

若$x\neq y$则$m_G(x,y)$称为顶点x及y的**连接度**，它表示x及y间弧的总数。注意$m_G(x,x)$为x上环的数目的二倍。若A和B为V的两个不相交的子集，令

$$(A,B)=\{u:\ u\in U;\ u=(x,y),x\in A,y\in B\};$$
$$m_G^+(A,B)=|(A,B)|;$$
$$m_G(A,B)=m_G^+(A,B)+m_G^+(B,A)。$$

定义2.6：设$u=(x,y)$，$x\neq y$，则称u为顶点x上的**射出弧**，或称u为顶点y上的**射入弧**。顶点x上射出弧的总数与x上环的数目之和叫顶点x的**外半次**，记为$d_G^+(x)$；同理可以定义**内半次**$d_G^-(x)$，并称顶点x上内、外半次之和为x的**次数**，记为$d_G(x)$：

$$d_G(x)=d_G^+(x)+d_G^-(x)$$

若图上任一点的次数都相同，则称此图为**齐次**的。

定义2.7：对于任一非空子集$A\subset V$令$\omega^+(A)=(A,\overline{A})$

$$\omega^-(A)=(\overline{A},A)$$
$$\omega(A)=\omega^+(A)\cup\omega^-(A)$$

称$\omega^+(A)$为自顶点集A的**射出弧族**；$\omega^-(A)$为**射入弧族**；$\omega(A)$称为A的**关联弧族**。

定义2.8：若$m_G^+(x,y)=m_G^-(x,y)$对V中任二顶点x，y成立，则称图$G=(V,U)$为**对称的**。对1-图而言$G=(V,U)$对称的充分必要条件是

$$(x,y)\in U\Longrightarrow(y,x)\in U$$

定义2.9：若对任一$u=(x,y)\in U$，恒有

$$m_G^+(x,y)+m_G^-(x,y)\leqslant 1$$

则称此图为**反对称的**。对于1-图$G=(V,U)$为反对称的充分必要条件为

$$(x,y)\in U\Longrightarrow(y,x)\overline{\in}U$$

定义2.10：若对于任二顶点$x\neq y$恒有

$$m_G^+(x,y)+m_G^-(x,y)\geqslant 1$$

则称图$G=(V,U)$为**完备的**。一个1-图为完备的充分必要条件是

$$(x,y)\overline{\in}U\Longrightarrow(y,x)\in U$$

一个具有n个顶点的单纯完备图，叫作一个n**集团**，记为K_n，见图2－7。

定义2.11：若图的顶点集V，可分为互不相交的两部分，$V=V_1\cup V_2$。而且$V_i(i=1,2)$内部各点互不相邻，则称此图为一个**二部图**，记为$G=(V_1,U,V_2)$。若对任一$x_1\in V_1$，$x_2\in V_2$恒有$m_G(x_1,x_2)\geqslant 1$则称此二部图为**完备的**。一个单纯、完备的二部图，当$|V_1|=p$，$|V_2|=q$时记为$K_{p,q}$，见图2－8。

定义2.12：设$G=(V,U)$为一图，$A\subset V$定义

$$U_A=\{u:\ u\in U;\ u=(x,y),\ x\in A,\ y\in A\}$$

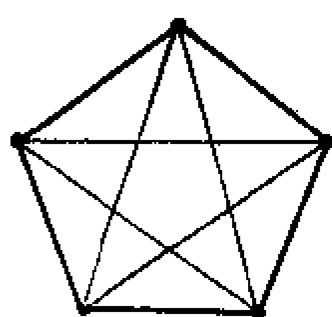


图2—7 K_5

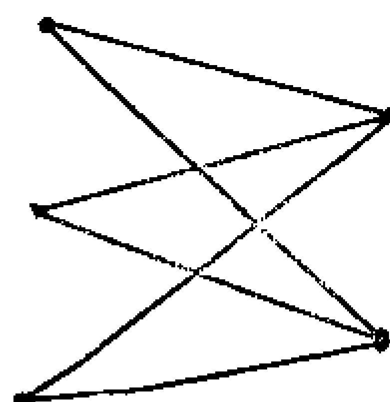


图2—8 $K_{3,2}$

称图$G_A=(A,U_A)$为图$G=(V,U)$的由A决定的**子图**。若$G=(V,\Gamma)$为一个1-图，则由$A\subset V$所决定的子图也是1-图，记为$G=(A,\Gamma_A)$，其中Γ_A为Γ在A上的限制：

$$\Gamma_A(x)=\Gamma(x)\in A,\quad x\in A$$

若U'为U的子集，即图$G=(V,U)$的一部分弧，则称图(V,U')为图$G=(V,U)$的一个**延伸子图**（用到每个顶点）。

若$A\subset V,U'\subset U$则称(A,U')为图$G=(V,U)$的**子图**，反之称$G=(V,U)$为(A,U')的**优图**。

例如把全国铁路车站及线路视为一个图，则北京局管内各站所决定的子图，就是北京局的铁路图。由全国各火车站及单轨线路和双轨的上行线路所构成的图，为全国铁路图的延伸子图。

定义2.13：图$G=(V,U)$的弧列$\mu=(u_1,u_2,\cdots u_q)$叫作一个**链**，系指列中的弧u_i，$i=2,3,\cdots,q-1$，与其前面的弧u_{i-1}和后面的弧u_{i+1}各有一个共同的端点。并称链中弧的数目为链μ的长度q。一个没有重复顶点的链，叫作**基本链**。没有重复线的链叫做**单链**。并分别称u_1的、不和u_2在此链内共有的点，和u_q的、不和u_{q-1}在此链内共有的点为链的起点和终点，或统称为**链的端点**。又定义G的一个顶点为一条长度$q=0$的链，此点是此链重合的起点和终点。一条分别以x和y为起点和终点的链记作$\mu[x,y]$。

定义2.14：一条长为$q>0$的链$\mu=(u_1,u_2,\cdots u_q)$，若满足下列条件时，叫作长为q的**路**（或路径）：u_i的终点必为u_{i+1}的起点（$i<q$）。

对于1-图，一条基本路完全由它的顶点列$x_1,x_2,\cdots,x_{q+1}$决定，故按情况常用下列写法：

$\mu=[(x_1,x_2),(x_2,x_3),\cdots,(x_q,x_{q+1})]=(x_1,x_2,\cdots,x_q,\ x_{q+1})=\mu(x_1,x_{q+1})$。其中$x_1$和$x_{q+1}$分别叫做路$\mu$的起点和终点。

同理，对于一个单纯图，具有端点x和y的基本链，由其顶点列决定，并记为

$$\mu=\mu[x,y]=[x,x_1,x_2,\cdots,y]$$

定义2.15：我们把端点重合的链叫**圈**。把端点重合的单链叫**单圈**。并把端点重合的基本链叫**基本圈**。

定义2.16：同上理，我们分别称二端点重合的路、基本路和单路为**回路**、**基本回路**和**单回路**。

定义2.17：若对于图的任意两个不同的顶点x和y，总有一条链$\mu[x,y]$，则称此图为**连接的**。图的最大的连接子图叫作它的一个**连接分支**，或简称为图的**分支**。

由此可见，一个不连接的图至少有两个连接分支。图2—4是连接的。而图2—5有两个连接分支。图2—9有10个连接分支。今后用$\rho(G)$表示G的连接分支数。

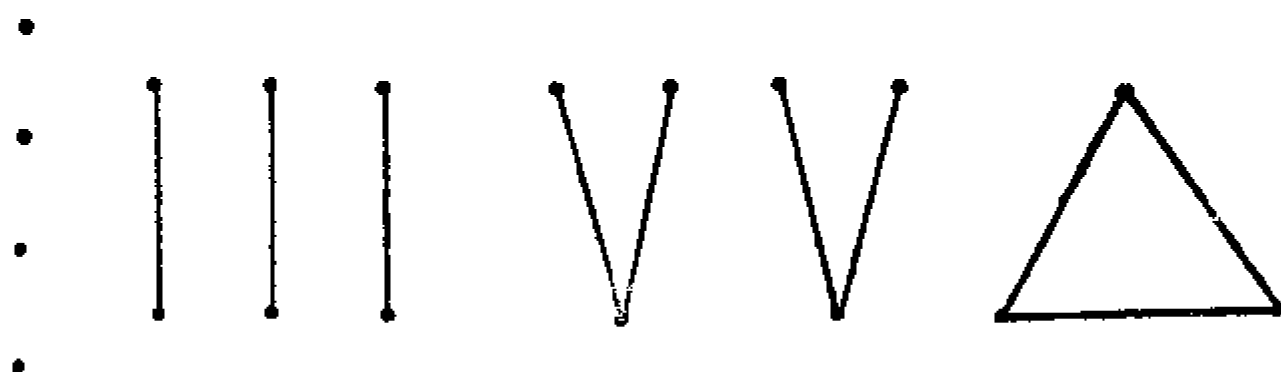


图2—9　有10个分支的图

定义2.18：设$G=(V, U)$为一个图，$W\subset U$，若将W从图中取出之后，如所得图$G'=(V, U-W)$满足$\rho(G')>\rho(G)$时，则称弧的集合W为图G的**弧割集**。同理，若由$V-A$决定的G的子图$G(V-A)$满足条件$\rho[G(V-A)]>\rho(G)$时，则称顶点的集合A为**点割集**。当弧割集$W=\{u\}$只含有一条弧u时，称弧u为**桥**。当点割集$A=\{v\}$只含一个顶点v时，称v为**割点**。

连接图中既非起点又非终点的顶点集叫作**内点集**，记为M_G，于是

$$M_G=V-S_G\cup T_G=\{v;\ v\in V,\ v\overline{\in}S_G\cup T_G\}^*$$

在图2—6中内点集为　$M_G=\{v_2, v_3, v_4\}$，起点集为单点集

$$S_G=\{v_1\}$$

终点集

$$T_G=\{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$$

而且每一个内点v_i，$i=1, 2, 3, 4$，均为割点。这不是偶然的，这一性质对任何一个树均成立。而且树$G=(V, U)$中的弧均为桥。其它的图一般不具此性质。

对于图2—7中的K_5，若W为一弧割集，则$|W|>3$。而且在同一顶点上的四条边构成K_5的一个边割集。任一含七条边的集合必为边割集，但可以找到一个含六条边的集合W_6不是边割集。图2—4的顶点集$\{a, c\}$及$\{c\}$均为点割集。若$W(A)$非空，则它是一个线割集。

第四节　加　权　图

铁路网是一种运输网。从实用的角度看，运输研究的任务之一是如何发挥铁路的运输能力。就铁路线路而言，各区段间都有一个通过能力，即最大的运输强度，用图的语言来说就是各线上有（最大）容量。如果我们着眼于站场设备，则各技术站又有其改编能力．所以各站的特殊情况也影响铁路网的运输能力。如果用图的语言来说就是各顶点有时须要考虑它的权。确言之有以下定义。

定义2.19：若对于图$G=(V, U)$的每一条弧$a_k(i, j)$**，或顶点v_k（k为弧或顶点的编号）都有一个实数集$\{\omega_r[a_k(i, j)];\ r=1, 2\cdots\}$，略为$(\{\omega_r(k)\})$，则称此图为**加权图**。为了有所区别，称弧有加权的图为**弧权图**，记为$A\cdot W\cdot G$，同理可定义**边权图**$E\cdot W\cdot G$。称顶点上加权的图为**点权图**，记为$P\cdot W\cdot G$，而把加权图作为$A\cdot W\cdot G$与$P\cdot W\cdot G$的统称，记为$W-G$，对于1-图将$\{\omega_r[a_k(i, j)]\}$记为$\{\omega_r(i, j)\}$或$\{\omega_{ij}\}$。一般的将$\{\omega_r[a_k(i, j)]\}$略为$\{\omega_{kr}\}$，足标r为第k个弧上的第r个权。若把边权图的每一条边$[x, y]$看作一对弧，且对于一切k和r，恒有$\omega_r[a_k(x, y)]=\omega_r[a_k(y, x)]$，则称此$E\cdot W\cdot G$为**权对称的**。

---

*在集的运算中，规定并运算$\cup$及交运算$\cap$比差运算紧，以节约括号。

**为简单计，以下在不致混淆的情况下，记弧(v_i, v_j)为(i, j)。

定义2.6：设$u=(x, y)$，$x\neq y$，则称u为顶点x上的**射出弧**，或称u为顶点y上的**射**

此后总用以下的特殊符号来表示权的某些特殊的解释：用$c(i, j)$表示1-图中(v_i, v_j)弧上的容量，例如道路、导管和导线上的运输最大限度指标。用$f(i, j)$表示通过弧(v_i, v_j)上的货物、信息、水等等的流量。用$p(i, j)$表示弧(v_i, v_j)上的概率权。例如$p(i, j)$可以是弧(v_i, v_j)能够提供使用的概率，即

$$p(i, j)=P\{(v_i, v_j)\in U\}$$

其中$\{(v_i, v_j)\in U\}$表示事件"弧(v_i, v_j)存在"；$P\{X\}$表示"事件X的概率"。

例2.5：设图2—10为一个有线通信系统，其中顶点v_1、v_2和v_3表示三个站，连线表示电线；弧上的权$l(i,j)$表示线路(v_i, v_j)之长；费用为$\alpha(i, j)$；$c(i, j)$为线路(v_i, v_j)上每秒通过的信息容量单位；$p(i,j)$表示线路(v_i, v_j)正常运转的概率。同时假设v_i站的容量为$c(i)$，正常运转的概率为$p(i)$。

由加权图的意义和对运输网的习惯理解，以铁路运输网为例，在每一条弧上的流量$f(i, j)$必须不超过该弧上的容量$c(i, j)$：

$$0\leqslant f(i,j)\leqslant c(i,j) \tag{2.1}$$

在运输过程中，除了发点v_s和收点v_t之外，在一切中间站上，货物只是通过。因此当令$f(A,B)=\sum\limits_{\substack{i\in A\\ j\in B}} f(i,j)$时，还应有：

$$f(i,V)-f(V,i)=\begin{cases} f_{s,t} & 若 i=s, \\ 0 & 若 s\neq i\neq t, \\ -f_{s,t} & 若 i=t。\end{cases} \tag{2.2}$$

其中$f_{s,t}$为从v_s发往v_t的流$\mathscr{F}$之值。公式（2.2）说明在任何中间$v_i (i\neq s, t)$上，流向v_i之货物总量$f(V,i)$等于从v_i流出的总量$f(i,V)$。

定义2.20：若加权网上的流满足条件（2.1）则说它是**相容的**；若满足（2.2）则说它是**守恒的**。若网上的流：

$$\mathscr{F}=\{f(i,j);\ (i,j)\in U\}$$

既守恒又相容，则说$\mathscr{F}$是网上的**可行流**，并称$f_{s,t}$为**流$\mathscr{F}$的值**。

例2.6：对于图2—11，我们可以看出它有一个可行流：

$f(s,1)=f(1,t)=1$；　$f(s,2)=f(2,t)=2$；　$f(s,t)=3$；

$f_{s,t}=6$。

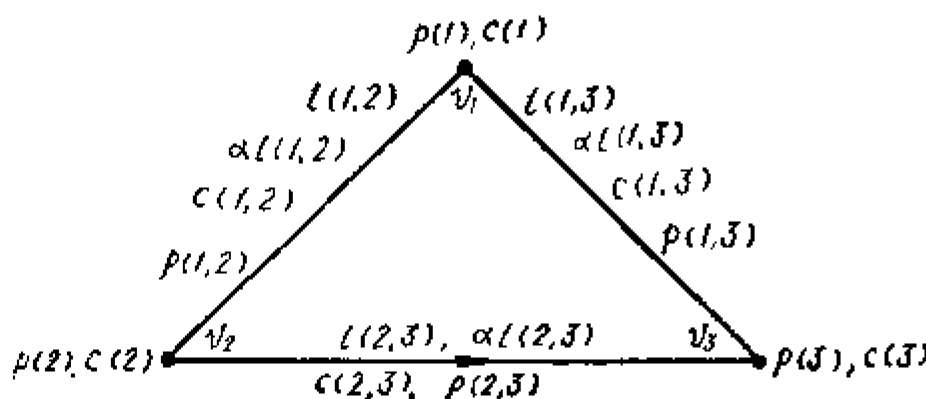


图2—10　ω-G

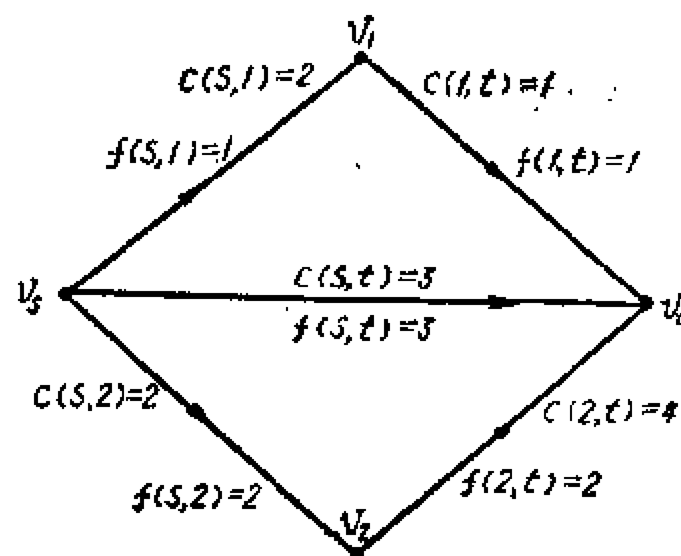


图2—11　可行流

第五节　图的矩阵表示法

在涉及到图的计数问题，或在电子计算机里的存储时，应用矩阵来表示图是非常有效的。本节介绍图的矩阵表示法。

定义2.21：设$G=(V,U)$为一无环图，$|V|=n$，$|U|=m$。则称以

$$r_{i,j}=\begin{cases}+1 & \text{如第 } j \text{ 条边以} v_i \text{为起点；}\\ -1 & \text{如第 } j \text{ 条边以} v_i \text{为终点；}\\ 0 & \text{如第 } j \text{ 条边不以} v_i \text{为端点。}\end{cases}$$

为第i行第j列元素的矩阵　$R=[r_{i,j}]$为图G的**关联矩阵**。

例2.7：图 2 —12的关联矩阵为

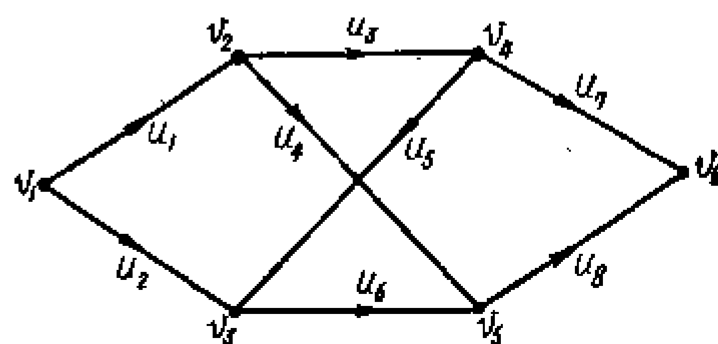


图 2 —12　关联矩阵

$$R=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8\end{array}\\ \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\end{array}\right)\begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\end{array}\end{array}$$

定义2.22：设$G=(V,U)$为一个图$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，定义$a_{ij}=m_G^+(v_i,v_j)$并称方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

为图G的**结合矩阵**。设$c_{ij}=a_{ij}+a_{ji}$,则称方阵$C=[c_{ij}]$为图G的**连接方阵**。

图 2 —12的结合方阵与连接方阵分别为A 和C 如下：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

易见C＝A＋A′为对称方阵。C的实际意义在于表示各顶点间的连接性，c_{ij} 表示顶点v_i与v_j之间的连线数，所以其对称性的直观意义是显然的。对结合方阵A而言，第 i 行元素之和

$$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=d_G^+(v_i)$$

是顶点v_i的外半次；而第 j 列元素之和

$$a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}=d_G^-(v_j)$$

是顶点v_j的内半次。从而第 i 行与第 i 列元素之和是顶点v_i的次数。

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+a_{ji})=d_G(v_i)$$

定义2.23：与图有关的还有圈矩阵和最小（或基本）割集矩阵。将图的圈（随意地）给以编号 $i=1, 2, \cdots, k$，又设线的编号为 $j=1, 2, \cdots, m$，并定义

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果第 } j \text{ 条线在第 } i \text{ 个圈中；}\\ 0 & \text{否则。}\end{cases}$$

则称$k\times m$阶矩阵B＝$[b_{ij}]$为图的**圈矩阵**。对于图 2 —12的圈矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&1\\1&1&1&0&0&1&1&1\\1&1&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1&1&0&0\\1&1&0&1&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

设图G＝（V,L）*中，使顶点v_s及v_t分离的最小割集（其真子集中没有s-t割集）为$S_{s-t}^{(1)}$，$S_{s-t}^{(2)}$，…，$S_{s-t}^{(p)}$，并定义

$$s_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果第 } j \text{ 条线} l_j \text{在} S_{s-t}^{(i)} \text{中，}\\ 0 & \text{否则。}\end{cases}$$

其中$i=1, 2, \cdots, p$，$j=1, 2, \cdots, m$。称$p\times m$阶矩阵$S_{s,t}=(s_{ij})$为图G的**s-t最小割集矩阵**。例如图 2 —12的 1 — 6 最小割集矩阵为

$$S_{1-6}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&1&0&0\\0&0&0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1&1\\1&0&0&1&1&0&0&1\\0&1&0&1&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

* 若所论问题对有向图及无向图均成立时，将图记为（V，L），并称L中元为线。

第六节 图的运算

图的运算的意义在于用比较简单或阶数较小的图表示一个比较复杂的图，这就使我们有可能用常见的图形来表示一个复杂的图。在图的定义中，并没有规定顶点间的相对位置，也没有限定两个相邻顶点间必须用什么样的线连接，因此可以想到同一图G＝(V,U)可以有多种图解式。如图2—13(a)、(b)及(c)所示情况。然而它们确实在本质上是同一个图，为此我们首先给出图的同构性定义。

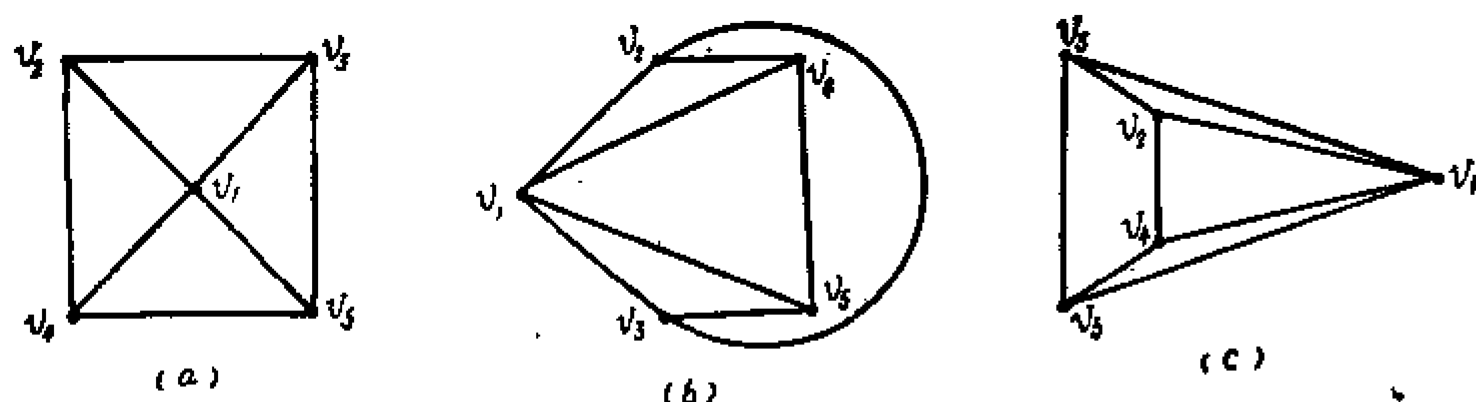


图2—13 图的同构

定义2.24：设$G_1=(V_1,U_1)$与$G_2=(V_2,U_2)$为两个图，倘若它们之间存在满足下列条件的映射M，则称它们是**同构的**，记为$G_1\approx G_2$。

(h_1) M将V_1 1－1 映射到V_2上；

(h_2) 对于V_1中任意两个顶点a_1及a_2恒有

$$m_G^+(a_1,a_2)=m_G^+(b_1,b_2)$$

其中$b_1=M(a_1)$，　$b_2=M(a_2)$。

图2—13中的三个图中任意两个都是同构的。相应的1－1映射为编号相同的点互相对应。对于(n,m)-图G容易验证，若G是单纯图且$n\leqslant 3$，则对于固定的m和n (n,m)-单纯图都是同构的。一般约有以下定义。

定义2.25：图G＝(V,U)的**不变量**是这样的数，在同构映射之下，此数保持不变。

例如图的顶点数$|V|$或弧数$|U|$，均为不变量。由上列说明可知，顶点不超过三个的单纯图，只要它们的弧数也相等，则此二图必同构。一般可以设想一个图应该由一组完备不变量唯一的决定（在同构意义之下）。然而至今都没有找到一组适用的完备不变量组。

图的运算有各种形式，由于目的和作者的不同，运算的形式很不相同，也没有共同的名称和表示法。这里主要介绍一般性的运算。由于任何一个图都可以和一个以某些自然数为顶点的图同构，另一方面，我们又常常把同构的图等置。于是两个图的运算，总可以视为以$V=\{1,2,\cdots,N\}$为顶点的K_N集团的子图之间的运算，其中N足够大。

定义2.26：设$G_1=(V_1,U_1)$，$G_2=(V_2,U_2)$为图G＝(V,U)的两个子图。称图$(V_1\cup V_2,U_1\cup U_2)$为$G_1$和$G_2$的**并**，记为

$$G_1\cup G_2=(V_1\cup V_2,\ U_1\cup U_2)。$$

同理定义图G_1与G_2的交图和差图为

$$G_1\cap G_2=(V_1\cap V_2,U_1\cap U_2)$$

$$r_{ij}=\begin{cases}+1 & 如第j条边以v_i为起点，\\ -1 & 如第i条边以v_i为终点。\end{cases}$$

及 $$G_1-G_2=(V_1',\ U_1-U_2)$$
其中V_1'是V_1中满足$\omega_{G_1}(\{v\})-U_2\neq\phi$的点$v$的集合。

这里对于差图，要求G_1和G_2都不含孤立点，即只对于不含孤立点的子图才定义差图．而且差图中也不含孤立点，故$V_1'\subset V_1$。进而定义**对称差图**

$$G_1\triangle G_2=[(V_1\triangle V_2)',U_1\triangle U_2]$$

〔此处$(V_1\triangle V_2)'$是$V_1\triangle V_2$中满足至少关联于$U_1\triangle U_2$中一条线的点的集合，故$(V_1\triangle V_2)'\subset(V_1\triangle V_2)$〕。

我们从图的运算的意义着手，给出图的子图（并不失一般性）的并图、交图、差图及对称差图的定义。现在我们再一次地从实际问题上来说明上列运算。取$G=(V,U)$为全国运输网，则它可以分解为铁路网$G_1=(V_1,U_1)$、水上运输网$G_2=(V_2,U_2)$、公路网$G_3=(V_3,U_3)$和空中运输网$G_4=(V_4,U_4)$四个图的并

$$G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4$$

而交图$G_1\cap G_2$表示这样一个图，它的顶点集$V_1\cap V_2$为水陆两用港口，例如天津、上海、南京、青岛、营口、广州、重庆等等。然而这个交图的弧集$U_1\cap U_2$，需要更为谨慎的识别。例如天津到青岛有直达海运，即在图$G_2=(V_2,\ U_2)$中U_2里包含（津、青）弧，但在铁路网$G_1=(V_1,U_1)$中却没有津—青直达列车，故在U_1中不存在（津、青）弧，所以在$G_1\cap G_2$中天津与青岛不相邻。上海与南京在$G_1\cap G_2$中却是相邻的。

为了进一步利用常见的简单、小图来表示复杂的图，下面给出一个图的倍数概念和图的其它运算。

定义2.27：设G为一个连接图，定义kG为k个连接分支的并图

$$kG=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_k\qquad k=1,\ 2,\ \cdots$$

其中$G_i\approx G$，$i=1,\ 2,\cdots,\ k$。

定义2.28：设$G=(V,U)$为一个图，定义它的补图为$\overline{G}=(V,\ \overline{U})$。其中$(v_i,v_j)\in\overline{U}$的充分必要条件是 $$(v_i,v_j)\overline{\in}U。$$

利用上列概念，图2—9可以表示为$4K_1\cup3K_2\cup2K_{1,2}\cup K_3$。为了计算最短路径或为判别顶点之间的可达性，有时尚须逻辑运算。

定义2.29：设$G=(V,U)$为一个图，定义它的**逻辑积**$G\wedge G$为这样的图，它的顶点集仍为V，它的弧的集为$U^{(2)}$，$(v_i,v_j)\in U^{(2)}$的充分必要条件是在G中存在由v_i到v_j的长为2的路。记为 $$G^{(2)}=G\wedge G=(V,U^{(2)})$$
递归地定义 $$G^{(r)}=G\wedge G^{(r-1)}=(V,U^{(r)}),$$
且$(v_i,\ v_j)\in U^{(r)}$ 表示在原图中从v_i到v_j存在长为r的路。

定义2.30：设$G_1=(V,U_1)$及$G_2=(V,U_2)$为$G=(V,U)$的两个延伸子图，定义它们的**逻辑和**$G_1\vee G_2=(V,U_1\vee U_2)$，$(v_i,v_j)\in U_1\vee U_2$的充分必要条件是$(v_i,v_j)\in U_1$或$(v_i,v_j)\in U_2$。

定义2.31：对于n阶图$G=(V,U)$，我们称图

$$G\vee G^{(2)}\vee G^{(3)}\vee\cdots\vee G^{(n)}$$

为图G的**道路图**，记为$G^p=(V,U^p)$。

有时须要将完全不同的图进行综合考虑，为此引入图的笛卡尔积的概念。

定义2.32：设$G_1=(V_1,U_1)$，$G_2=(V_2,U_2)$，我们称图

$$G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, U_1 \times U_2)$$

为G_1和G_2的**笛卡尔积**。其顶点集$V_1 \times V_2$为V_1和V_2的笛卡尔积，即$(x, y) \in V_1 \times V_2$的充要条件是$x \in V_1, y \in V_2$；$v_1 = (x_1, y_1)$与$v_2 = (x_2, y_2)$相邻的充要条件是$(x_1, x_2) \in U_1$和$y_1 = y_2$或$(y_1, y_2) \in U_2$和$x_1 = x_2$。

设$G_1 = (V_1, U_1)$为全国分省地图，$V_1 = \{x_1, x_2, \cdots x_{30}\}$为30个省、市、自治区。$(x_i, x_j) \in U_1$的充分必要条件是$x_i$与$x_j$有共同边界。设$G_2 = (V_2, U_2)$为时间顺序图

$$V_2 = \{t_{-1}, t_0, t_1\}$$

其中t_{-1}，t_0和t_1分别表示过去、现在和未来。$U_2 = \{(t_{-1}, t_0), (t_0, t_1)\}$，于是$G_1$与$G_2$的笛卡尔积

$$G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, U_1 \times U_2)$$

的相邻关系为以下两种情况：

（1）不论是在过去、现在还是未来，相邻的省、市、自治区总相邻；

（2）对任一省、市、自治区而言，过去与现在相邻；现在与未来相邻。

为了进一步了解图的笛卡尔积，我们给出图2—14。

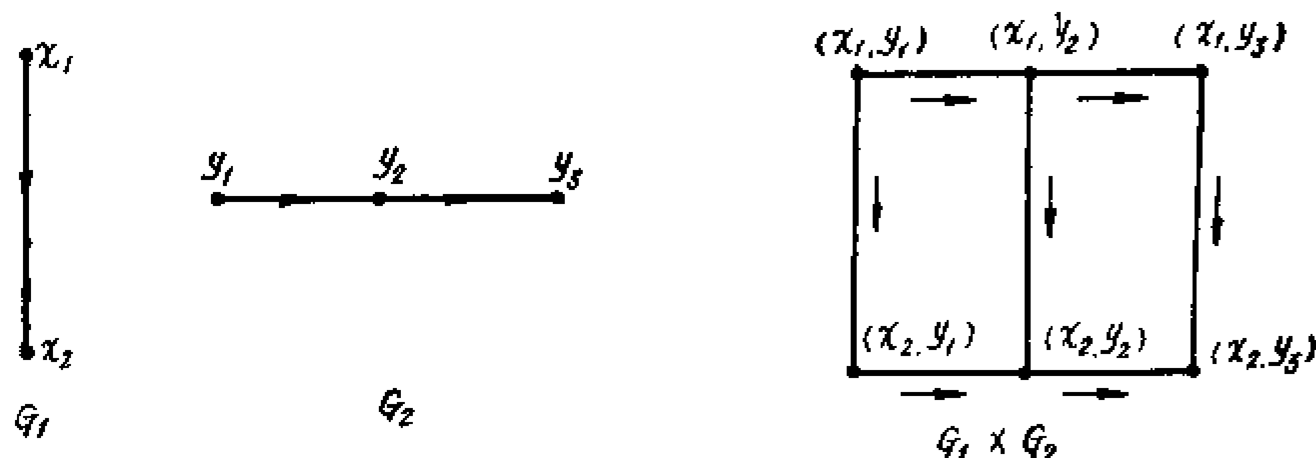


图2—14　笛卡尔积图

第七节　图在电子计算机里的存储

图的计算问题，经常是极为复杂的，因此在图的应用中，一方面要进行深刻的理论探讨，同时还必须运用电子计算机。这里遇到的第一个问题是如何把一个图存储在电子计算机里。以下我们给出三种存储方法。

一、边目录方法

定义两个一维数组B1(I)和B2(I)：若第I条边连接顶点v_j和v_k时，令B1(I)$=j$，B2(I)$=k$（为简单计以下常用j表示v_j）。由于我们这里讨论的是无向图，所以j和k的次序是无关紧要的，因此也可以把上述边记为B1(I)$=k$，B2(I)$=j$。

为了说明用边目录方法存储图，我们考虑下面的(6,9)图(见图2—15)。表格中给出了各边的端点，它唯一地确定出右边的图，反之亦然。

二、邻接目录方法

本方法也要使用两个数组，第一个是一维数组，称为$NADJ$(I)，它的第I行表示与顶点I（即v_I）相邻的顶点数。另一个为二维数组，称为$NEAR$(I, J)，它的第(I, J)个位置上

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B1(I)	1	1	1	2	2	3	3	4	4
B2(I)	2	3	4	6	5	5	6	5	6

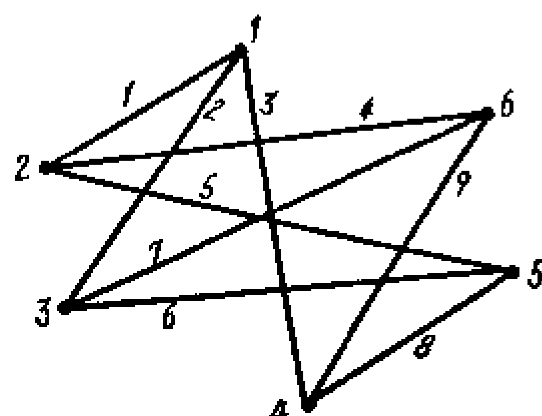


图 2—15 边目录法确定的图

的数，表示与顶点I相邻的第J个顶点。与顶点I相邻的$NADJ$个顶点可以按任意顺序存储、但不准许重复。故$NADJ$(I)仅告诉我们顺着邻接目录$NEAR$(I,J)有多少个点与顶点I相邻。用此方法存储图 2—15的情况如下：

I	$NADJ$(I)	$NEAR$(I,J) J=1	2	3
1	3	2	3	4
2	3	1	6	5
3	3	1	6	5
4	3	1	6	5
5	3	2	3	4
6	3	2	3	4

这个方法对于计算与已知顶点相邻的顶点数时特别方便。倘若我们要打印出图的各边时，可以使用以下的 *Fortran* 代码（简述）：

```
      INTEGER NADJ(50),NEAR(50,50)
      ⋮
      DO 1 I=1,N
      L=NADJ(I)
      IF(L.EQ.O)GOTO1
      DO2  J=1,L
    2 WRITE(6,3)I, NEAR(I,J)
    3 FORMAT('BRANCH FROM',14,'TO',14)
    1 CONTINUE
      ⋮
```

须知上列代码使每一条边打印两次；然而经加工可以使每一条边仅仅打印一次，方法是约定仅当J>I时，才打印出边(I,J)。为了便于判断J是否与I相邻，我们引入逻辑变元FLAG(若J与I相邻，则$FLAG$=.$TRUE$.，否则$FLAG$=.$FALSE$.）。于是有下列代码：

```
      INTEGER NADJ(50), NEAR(50,50)
      LOGICAL FLAG
      ⋮
      FLAG=.FALSE.
      L=NADJ(I)
      IF(L.EQ.O)GOTO1
      DO2  K=1,L
      IF[NEAR(I,K).EQ.J]FLAG=.TRUE.
    2 CONTINUE
```

```
1 CONTINUE
  ⋮
```

三、邻接矩阵方法

最后这一方法仅需要一个二维数组，称为ADJ(I,J)。它的(I,J)位置上为I与J是否连接的示性数：当I与J相邻时为1，否则为零。从而图2—15用这个方法存储的形式为：

ADJ(I,J)	I	J=1	2	3	4	5	6
	1	0	1	1	1	0	0
	2	1	0	0	0	1	1
	3	1	0	0	0	1	1
	4	1	0	0	0	1	1
	5	0	1	1	1	0	0
	6	0	1	1	1	0	0

为了打印出图的边，下面给出历数ADJ(I,J)矩阵之元的代码：

```
      INTEGER ADJ(50,50)
        ⋮
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
      IF(ADJ(I,J).EQ.1)WRITE(6,2)I,J
    1 CONTINUE
    2 FORMAT('BRANCH FROM',I4',TO',I4)
        ⋮
```

这里还是规定仅当J>I时，才打印边(I,J)。应用邻接矩阵方法可以很方便地确定出一条边是否在已给图中，因为可以用下列代码直接鉴定ADJ(I,J)：

```
      INTEGER ADJ(50,50)
        ⋮
      FLAG=.FALSE.
      IF(ADJ(I,J).EQ.1)FLAG=.TURE.
        ⋮
```

对于某一特殊问题，究竟应采取何种方式存储，这要依赖于许多因素。第一个因素是要使为特定目的进行的检查比较容易地完成。例如需要判定各边的端点时，使用边目录法为宜；而要检查各顶点的邻接点时，就要用邻接目录法。第二个因素是要考虑存储的容量。例如要存储一个有1000个顶点、不超过2000条边的图时，易知边目录方法仅需要4000个词汇；而邻接矩阵方法就需要存储一个1000×1000=100万个词汇的矩阵，这显然是不可能的。

习　　题

1. 试证若$G=(V,E)$为一个单纯图，有n个顶点、p个连接分支，则G中边数最多为$\frac{1}{2}(n-p)(n-p+1)$。

2. 试证一个具有n个顶点多于$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$条边的单纯图必是连接的。

3. 试证不可能把$K_{3,3}$画在一张纸上，使边之间除在顶点之外均不相交（这种图叫作非平面图）。

4. 在图2—16中，设顶点表示存放某种货物的地址，各圈表示取货车辆的运行线路。问应如何安排取货日程，使每天到一个固定地址取货的次数至多一次？并问最小循环周期为几天？

这是一个图的问题。将每一运行线路作为一个顶点：$V=\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$。且仅当$T_i$与$T_j$有共同地址时，在$T_i$与$T_j$间连一无向边，于是得图G=(V,U)的图解，如图2—17。今以M、T和W分别

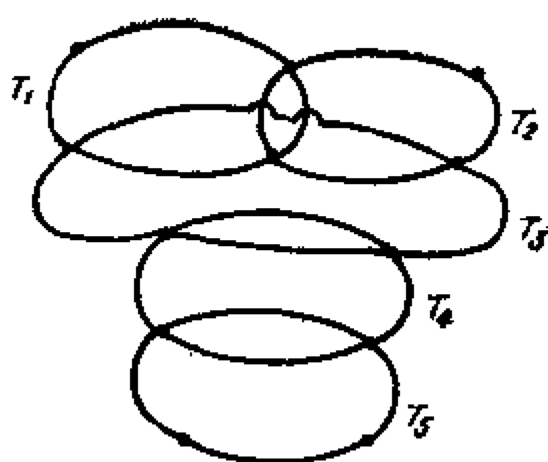


图 2—16 规划图（1）

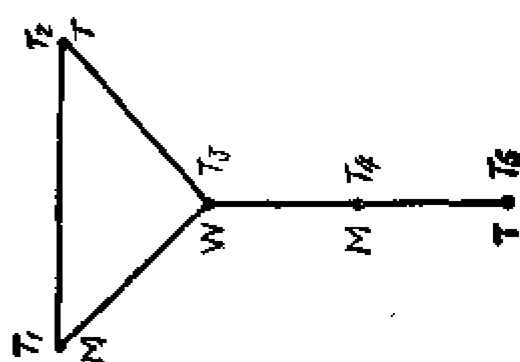


图 2—17 规划图（2）

表示礼拜一，礼拜二和礼拜三。当按图 2—17所标日期到各点取货时，能确保在同一天中到同一点取货次数至多一次，而且三天为一周期。细审安排原则为（1）任何两个相邻的顶点均为不同的日期；（2）以顶点序安排日程时，在（1）之下要优先选用M，不得已而用T，最后用W。这就是色数问题的格隆地函数方法。

5. 试证一个图的弧的总数为$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i)$。

6. 试证在一个图中，次数为奇数的顶点个数必为非奇数。

7. 若一个图是一个一笔画，试论其顶点次数应满足的条件。

8. 试将图 2—18的每一顶点染一种颜色，条件是使相邻顶点染不同的颜色，试证图 2—18 为 4 色图（即用三种色不能给四个顶点全染上色，但 4 种颜色则可以）。

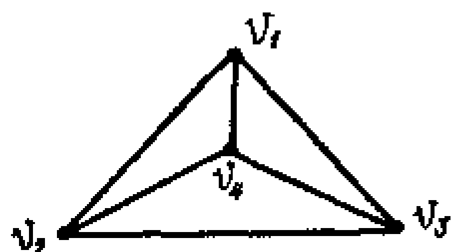


图 2—18 色图

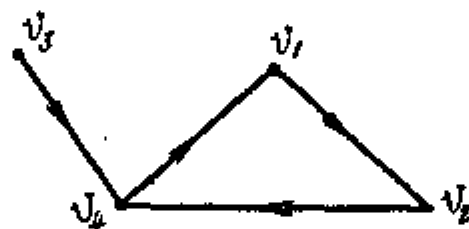


图 2—19 10题用图

9. 试证图 2—6 为二色图。

10. 对于图 2—19找出所有：

(*a*) 3—2路； (*b*) 3—2链；

(*c*) 圈； (*d*) 回路；

(*e*) 4—2的弧割集； (*f*) 4—2最小弧割集；

(*g*) $\Gamma(v_1)$； (*h*) $\Gamma^{-1}_{(v_1)}$；

(*i*) $\Gamma(\{v_1,v_2\})$； (*j*) $\Gamma^{-1}(\{v_1,v_2\})$；

(*k*) 关联矩阵R； (*l*) 连接矩阵C；

(*m*) 回路矩阵； (*n*) 最小 4—2 割集矩阵。

11. 试证若图中恰有两个顶点v_i及v_j它们的次数为奇数，则v_i及v_j必在图中的同一连接分支之内，即存在从v_i到v_j的一条链。

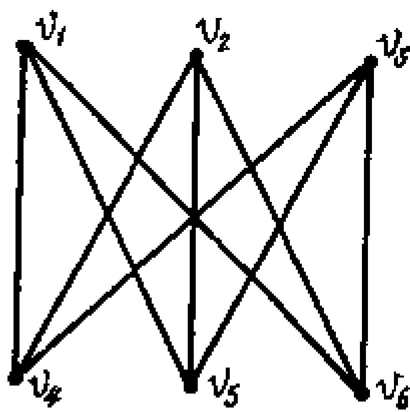
12. 设G＝(V,U)为一个完备图，则必存在顶点v_i使对所有顶点$v_j \neq v_i$，都有一条长度最多为 2 的路。再则v_i为满足上列条件的顶点的充分条件是

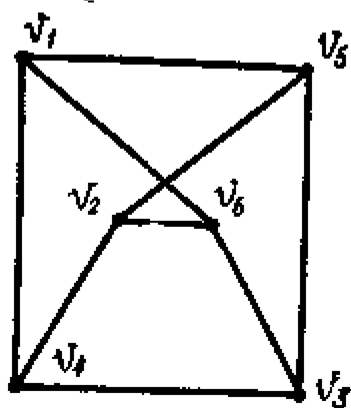
$$|\Gamma(v_i) - \{v_i\}| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\Gamma(v_j) - \{v_j\}|$$

第三章 圆、赤圆和树

13．试证无向图$G=(V,E)$为二部图的充分必要条件是每一个圈均含有偶数条边。

14．试证以下三个图G_1，G_2和G_3同构。





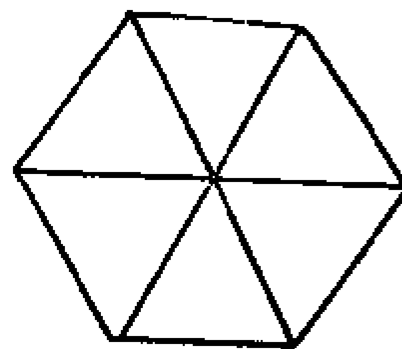


图 2—20　同构图

这里还是规定仅当J>I时，才打印边(I,J)。应用邻接矩阵方法可以很方便地确定出……

第三章　圈、余圈和树

在图的研究中树的概念起着重要作用，这不仅是涉及到导致图论产生的那些经典应用，而且也因为对于图论本身的理论研究，树也占有关键性的地位。另外树的结构及其性质有直观、简洁的特征，也促使人们常从树着手来讨论更为复杂的图的结构。与树、延伸子树的概念密切相关的是圈和余圈（或称为割集）的概念。

第一节　图的圈和余圈

一、圈和余圈的结构

不论在图的理论和应用的研究方面，圈和回路的概念都是很重要的。例如凡是研究过最优运输方案的人员，都知道路网中圈的重要意义。又例如按基尔霍夫定律，在电路计算中，方程组的个数应该是独立圈的个数。同圈相联系的是余圈。如北京铁路局与其它路局交界上的路段，用图的语言来说就是全国路网的一个余圈。由图 3－1 可以立刻得到圈的结构特征。

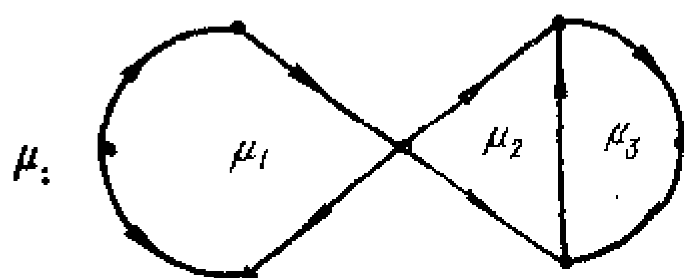


图 3－1　圈的结构

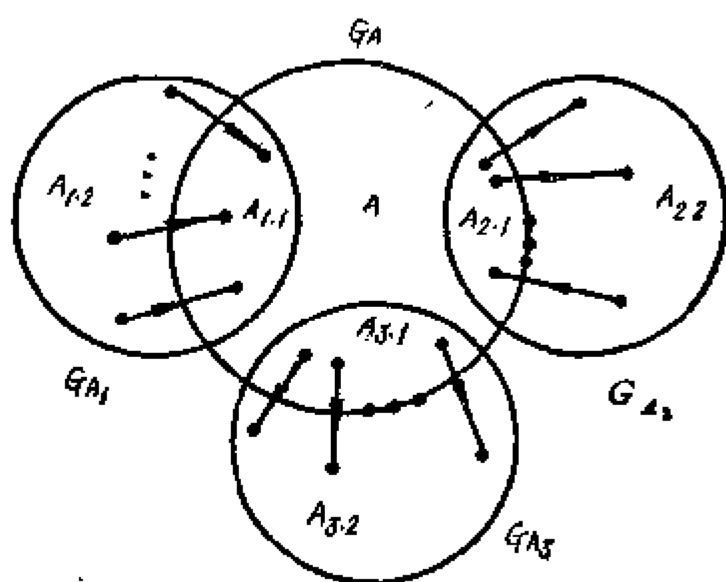


图 3－2　余圈结构

性质3.1：任何一个圈都可以分解为基本圈的并。

$$\mu=\mu_1\cup\mu_2\cup\cdots\cup\mu_k$$

定义3.1：设$A\subset V$，$\omega(A)$非空，则又称A的关联集$\omega(A)$为图 $G=(V,U)$的**余圈**。若G_A为G的一个连接分支，A_1和A_2为A的一个分割，且G_{A_1}和G_{A_2}均为G_A的连接子图，则称$\omega(A_1)$或$\omega(A_2)$为一**基本余圈**。若$\omega(A)=\omega^+(A)$或$\omega(A)=\omega^-(A)$则称$\omega(A)$为一**余回路**。同理可定义**基本余回路**。

与图 3－1 相应的是余圈的结构图 3－2。设$G=(V,U)$由三个连接分支G_{A_i} $(i=1,2,3)$组成。取 $A=A_{1.1}\cup A_{2.1}\cup A_{3.1}$，则$\omega(A)$为一个余圈。显然$\omega(A)$为三个基本余圈之和：

$$\omega(A)=\omega(A_{1.1})\cup\omega(A_{2.1})\cup\omega(A_{3.1})$$

圈和余圈的基本性质已如上所述，总结如下。

性质3.2：基本余圈ω为最小割集（ω中取消任一元后不再是割集）。

性质3.3：一个圈是基本的，其充分必要条件是它为不可分的（即它的任何一个部分都不是圈）。

性质3.4：任何一个余圈都可以分解为基本余圈的和。

性质3.5：一个余圈是基本的，其充分必要条件是它为不可分的（即它的任何一部分都不是余圈）。

前两个性质是十分显然而且易于论证，今给出后两个性质的证明。

证明性质3.4设$\omega(A)$为一个余圈，G_A为$G=(V,U)$中A的生成子图。再设G_A的连接分支为G_{A_1}，G_{A_2}，…，G_{A_k}，于是得A的一个分割

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$$

则
$$\omega(A)=\omega(A_1)\cup\omega(A_2)\cup\cdots\cup\omega(A_k)$$

易见$\omega(A_i)\cap\omega(A_j)=\phi$，只要$i\neq j$。设$G_{C_i}$为G图中含$G_{A_i}$的连接分支。若由$C_i-A_i$所产生的图$G_{C_i-A_i}$含有$l$个连接分支

$$G_{(C_i-A_i)_1},\quad G_{(C_i-A_i)_2},\cdots,\quad G_{(C_i-A_i)_l}$$

则
$$\omega(A_i)=\omega[(C_i-A_i)_1]\cup\omega[(C_i-A_i)_2]\cup\cdots\cup\omega[(C_i-A_i)_l]$$

上式右端各项显然是互不相交的，而且$\omega[(C-A_i)_1]$为一个基本余圈。因为$(C_i-A_i)_1$与$A_i\cup(C_i-A_i)_2\cup\cdots\cup(C_i-A_i)_l$为G的连接分支$G_{C_i}$顶点集$C_i$的一个分割。同理

$$\omega[(C_i-A_i)_2],\ \cdots,\ \omega[(C_i-A_i)_k]$$

均为基本余圈，于是证明了性质3.4。

证明性质3.5：设ω是一个基本余圈，则存在G的一个连接分支G_C及C的一个分割

$$C=A_1\cup A_2$$

使$\omega=\omega(A_1)$，其中G_{A_1}及G_{A_2}均为连接的子图，故ω不可分。

反之，设ω为一个不可分的余圈，必存在顶点集A，使$\omega=\omega(A)$。则A必为决定连接分支的顶点集C的子集；$A\subset C$，G_C为一个连接分支。且G_A及G_{C-A}均为连接子图，从而$\omega(A)$为一基本余圈。

二、图的回路和余回路分解

色弧引理 将图$G=(V,U)$的弧u_1着黑色，而后将其余$m-1$条弧以红、黑、绿三色任染一种颜色，则恰有下列情况之一成立：

1. 存在一个包含弧u_1的基本圈，它不含绿弧，且所有黑弧在圈中同向。
2. 存在一个包含弧u_1的基本余圈，它不含红弧，且所有黑弧在余圈中同向。

证明：用下列迭代程序相继给图的顶点标号。

（1）设$u_1=(s,a)$则将顶点a标为$\overline{a}$。

（2）若顶点x已被标号$\overline{x}$，而顶点y与x相邻尚未标号，当下列条件之一成立，则将顶点y标号：

（a）存在黑弧(x,y)，或

（b）存在红弧(x,y)或(y,x)。

当标号过程终止时，则恰有以下两种情况之一成立。

情况甲，顶点s标了号$\overline{s}$。于是得到一个含弧u_1的圈μ，其中一切黑弧同向，而且不包含绿弧、由性质3.1可知存在G的一个基本圈μ_0具有所要求的性质。

情况乙：顶点s未被标上号。令A为全体已标号的顶点集。则$\omega(A)$为一个余圈，它不含红弧，而且任何黑弧都是指向A的，u_1显然也在$\omega(A)$中。故由性质3.3，存在含u_1不含红弧而且黑弧同向的基本余圈。

又甲、乙显然是对立的，故引理得证。

由色弧引理，只要把一切弧全染黑色，则立刻得到图的分解定理。

定理3.1：每一条弧或者属于一个基本回路，或者属于一个基本余回路，但任何弧都不能同时具有上列两种属性。

三、图的圈和余圈（矢量）空间

对于每个图构造两个矢量空间，即圈矢量空间和余圈矢量空间，这对某些理论或应用问题的论述是比较方便的。我们再一次强调指出，我们所讨论的图总是指

（1）它的顶点是编了号的n个点：v_1，v_2，…，v_n；

（2）它的弧（或边）也是编了号的m个元：u_1，u_2，…，u_m。

故对于图$G=(V,U)$的每一个圈$u=(u_{i_1},\ u_{i_2},\ \cdots u_{i_k})$或每一个余圈$\omega=\{u_{j_1},\ u_{j_2},\ \cdots,\ u_{j_l}\}$，都可以用只有两个元的域$\mathscr{F}=\{0,1\}$上的$m$维矢量表示：

$$\mu=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_m)$$
$$\omega=(\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots,\ \delta_m)$$

其中ε_i及δ_i为零或1，依照u_i不在或在μ或ω中而定。在域$\mathscr{F}$中对于加法规定$1+1=0$，其余运算依常规理解。

于是圈或余圈的并与它们所对应的矢量之和就可以等置。若一个0-1矢量是以$\mathscr{F}$的元为系数的一些圈（作为矢量）的线性组合，则称为是一个圈矢量，类似定义余圈矢量，因此我们有下列定义。

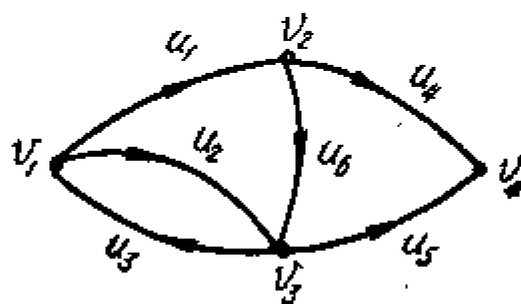


图3—3　基本圈和余圈

定义3.2：图的全部圈矢量所成的集合，叫作图的**圈空间**。记为C（G）；可类似地定义图的**余圈空间**，记为$\overline{C}(G)$。

例3.1：图3—3有六个基本圈：

$\mu_1=(1,1,0,0,0,1)$；　　$\mu_2=(1,0,1,0,0,1)$；

$\mu_3=(0,1,1,0,0,0)$；　　$\mu_4=(1,1,0,1,1,0)$；

$\mu_5=(0,0,0,1,1,1)$；　　$\mu_6=(1,0,1,1,1,0)$。

还有六个基本余圈：

$$\omega_1=\omega(v_1)=(1,1,1,0,0,0);$$
$$\omega_2=\omega(v_1,v_2)=(0,1,1,1,0,1);$$
$$\omega_3=\omega(v_1,v_3)=(1,0,0,0,1,1);$$
$$\omega_4=\omega(v_1,v_2,v_3)=(0,0,0,1,1,0);$$
$$\omega_5=\omega(v_1,v_2,v_4)=(0,1,1,0,1,1);$$
$$\omega_6=\omega(v_1,v_3,v_4)=(1,0,0,1,0,1)。$$

关于圈矢量或余圈矢量的相关性、独立性和基底、秩数等概念，与一般矢量空间相同，不一一重新定义。这里特别要指出的是矢量的线性组合的系数只能在$\mathscr{F}=\{0,1\}$中。例如，我

们说圈矢量μ_1，μ_2，…，μ_k为（线性）独立的，系指对于$\mathscr{F}$中任意k个不全为零的数ε_1，ε_2，…，ε_k总有

$$\varepsilon_1\mu_1+\varepsilon_2\mu_2+\cdots+\varepsilon_k\mu_k\neq 0$$

定义3.3：图的圈空间C(G)的秩数，叫作**圈秩**，记为ν(G)。同理余圈空间$\overline{C}$(G)的秩数，叫作**余圈秩**，记为λ(G)。

我们再重新审查图3—3。由于

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=0$$

故基本圈μ_1、μ_2和μ_3不是独立的。事实上

$$\mu_2=\mu_1+\mu_3$$

但μ_1、μ_3和μ_5是互独立的，这是由于它们之中的每一个都有一个其它两个圈不包含的弧。又

$$\mu_4=\mu_1+\mu_5$$
$$\mu_6=\mu_1+\mu_3+\mu_5$$

从而基本圈μ_1、μ_3、μ_5构成圈空间C(G)的一组基底。故此图的圈秩数ν(G)＝3。

ω_1、ω_4及ω_6三个基本余圈显然是互独立的（审查原则同μ_1、μ_3和μ_5）。且

$$\omega_2=\omega_1+\omega_6$$
$$\omega_3=\omega_4+\omega_6$$
$$\omega_5=\omega_1+\omega_4+\omega_6$$

故余圈空间$\overline{C}$(G)的秩数也是3。

$$\lambda(G)=3$$

定理3.2：m维空间R^m中的圈空间C(G)和余圈空间$\overline{C}$(G)正交：C(G)⊥$\overline{C}$(G)。

证明：设$\mu\in C(G)$，$\omega\in\overline{C}(G)$，且μ和ω均为基本的，$\omega=\omega(A_1)$，$C=A_1\cup A_2$，G_{A_1}与G_{A_2}为连接子图，G_C为G的连接分支。于是可知基本圈μ与G_C的关系只有两种情况：

（a）　　$\mu\cap G_C=\phi$

这时显然（因为$\omega\subset G_C$）它们的内积应等于零：

$$(\mu,\omega)=0；$$

（b）$\mu\cap G_C\neq\phi$则$\mu\subset G_C$（因为G_C为G的连接分支）。

故μ与ω不可能有奇数个共同边，再由$\mathscr{F}$的运算法则1＋1＝0可知$(\mu,\omega)=0$。

最后由内积的线性性质和圈矢量及余圈矢量均可表示为基本圈和基本余圈之和的事实（见性质3.1和3.3），可知对任一$\mu\in C(G)$及$\omega\in\overline{C}(G)$均有

$$(\mu,\omega)=0$$

第二节　树和余树

树的重要性不仅仅是因为它在多方面的应用，而且对于图论本身的发展也占有重要地位。在这一节里我们首先由刻画树的特征开始，而后利用图的延伸树来构造圈空间的一组基底，并讨论由延伸余树所得到余圈空间的对偶结构。

一、树的特征

定义3.4： 一个连接的无圈图叫**树**。所有连接分支均为树的图叫**森林**。

定理3.3： 设$T=(V,U)$是一个阶数大于2的图，则下列命题等价（于一个树）（$|V|=n$，$|U|=m$）：

T_1：T是一个树；

T_2：T有$n-1$条弧并无圈；

T_3：T是有$n-1$条弧的连接图；

T_4：T无圈，若在U中加入一新弧u，则图中恰出现一个圈；

T_5：T是最小连接图（即从U中取走任一弧之后所余图形不再是连接的）；

T_6：从T的任一顶点v_i到另一顶点v_j，恰有一条链。

证明　由$T_1 \Longrightarrow T_2$。只须证

$$m=n-1$$

为此我们定义顶点$v \in V$的k阶邻域如下：

$\Gamma_T^k(v)=\{x;\ x\in V$，从$v$到$x$的最短链$\mu[v,x]$之长为$k\}$

由于T为树，故有

$$\Gamma_T^1(v)=\Gamma_T(v), \qquad \Gamma_T^0(v)=\{v\}。$$

又因(n,m)图上最长的基本链之长小于n，且由定义$i<j$时$\Gamma_T^i(v)\cap\Gamma_T^j(v)=\phi$，从而可得V的一个分割

$$V=\{v\}\cup\Gamma_T^1(v)\cup\Gamma_T^2(v)\cup\cdots\cup\Gamma_T^{n-1}(v) \tag{3.1}$$

又因为树上无圈，故$i+1<j$时必有$m_T(\Gamma_T^i(v),\ \Gamma_T^j(v))=0$，而且当$\{v_1,v_2\}\subset\Gamma_T^i(v)$时，$m_T(v_1,v_2)=0$。再注意到树T为1-图，从而有

$$m=|\Gamma(v)|+|\Gamma^2(v)|+\cdots+|\Gamma^{n-1}(v)|=n-1$$

由$T_2 \Longrightarrow T_3$。设T有$n-1$条弧，无圈并有p个连接分支，那么它的每一分支必也无圈，从而T为一森林。设各分支的阶依次为n_1，n_2，…，n_p，则由$T_1 \Longrightarrow T_2$之证明得，

$$m_1=n_1-1,\quad m_2=n_2-1,\quad \cdots,\quad m_p=n_p-1。$$

所以
$$m_1+m_2+\cdots+m_p=n_1+n_2+\cdots+n_p-p$$

即
$$n-1=m=n-p$$

从而得
$$p=1$$

这说明T_3成立。

由$T_3 \Longrightarrow T_4$。设T有$n-1$条弧且为连接的。

由于T的连接性故（3.1）式成立，而且由于$m=n-1$故

$$m=|\Gamma_T(v)|+|\Gamma_T^2(v)|+\cdots+|\Gamma_T^{n-1}(v)| \tag{3.2}$$

注意到$m_T(\{v\},\ \Gamma_T(v))=|\Gamma_T(v)|$；$m_T(\Gamma_T^i(v),\Gamma_T^{i+1}(v))\geqslant|\Gamma_T^{i+1}(v)|$，$i=1,\cdots,n-2$。综合以上二式得

$$m_T(\Gamma_T^i(v),\Gamma_T^{i+1}(v))=|\Gamma_T^{i+1}(v)|,\quad i=0,1,\cdots,n-2。$$

这说明对于$\Gamma_T^{i+1}(v)$中任一点y，有$\Gamma_T^i(v)$中唯一的一个顶点x使$(x,y)\in U$。由于v的任意性可知，从T上的任一顶点v到其它顶点x只有唯一的一条链$\mu[v,x]$，从而T上无圈。

倘若在v_1与v_2二顶点间加入一条新弧$u=(v_1,v_2)$。则u与T上原来有的唯一的一条链$\mu[v_1,v_2]$构成一个圈。倘若尚有另外一个圈C，则$C-\{u\}$与$\mu[v_1,v_2]$是在T上连接v_1，v_2

的两个不同链，此与前段所证结果矛盾，故T_4成立。

由$T_4 \Longrightarrow T_5$。设T无圈，若在U中加一新弧u，则图中恰出现一个圈。若T不连接，则存在两个分属不同分支的顶点v_i和v_j，那末将$u=(v_i, v_j)$加入U之后不出现圈。此与T_4矛盾，故T是连接的。

次证T的最小连接性。倘若存在一弧$u \in U$，将u删除后所得差图$T-\{u\}$仍连接，则T中必有一个含弧u的圈，此也与T_4矛盾，故T是最小连接的。

由$T_5 \Longrightarrow T_6$。设T_5成立，即T为最小连接的。故对任二顶点v_i及v_j存在一条链$\mu[v_i, v_j]$，且此链唯一。否则若还存在另一条链，则可从后一链上删去一弧仍不破坏连接性，此与T_5矛盾。

由$T_6 \Longrightarrow T_1$。设T_6成立，则T是连接的。倘若T中有一个圈，则至少有两个顶点v_i及v_j之间的链不唯一，此与T_6矛盾，故T_1成立。

上列定理从六个不同的侧面，刻画了树的特征。即其中每一特征均可作为树的定义，因为它们都反映了树的内在联系。今后我们将依照所论问题的形式，适当的选用其中的一个定义或特征。读者可就图 2 — 6 观查树的各个特征。

定义 3.5： 若图G的顶点$v \in V$的次数为 1，则称v为G之**端点**。

定理 3.4： 一个阶数为$n \geqslant 2$的树，至少有两个端点。

证明：设$T=(V, U)$为一个树，倘若它的端点至多有一个，则T的边数$m \geqslant \frac{1}{2}[2(n-1)+1]$，故$m \geqslant n$，此与$T_2$的$m=n-1$矛盾，故阶数$n \geqslant 2$的树至少有两个端点。

定理 3.5： 任何一个连接图，都含有延伸（子）树。

证明：设图G是连接的，寻找盈弧（即删去它之后不破坏G的连接性），如有就将它删去，直到无盈弧为止。由T_5知余下的图为延伸树。

二、圈基的选法

在第一节中讨论了图的两个矢量空间：圈空间和余圈空间，又在第二节（一）中讨论了树及其特征，将两者结合起来，我们很容易从几何的角度给出一组圈基和余圈基。

定理 3.6： 设G是一个图，有n个顶点、m条弧和ρ个连接分支。则圈空间的秩数$\nu(G)$与余圈空间的秩数$\lambda(G)$分别为

$$\nu(G)=m-n+\rho$$
$$\lambda(G)=n-\rho$$

证明：设G的ρ个分支依次为(n_1, m_1)，(n_2, m_2)，…，(n_ρ, m_ρ)图。由定理3.5，可于第i个分支G_i中选取一个延伸子树T_i，它有n_i个顶点、n_i-1条边(见T_3)。将G_i-T_i中的m_i-n_i+1条弧依次加到T_i中，将使T_i恢复到G_i。由T_4可知在G_i中存在m_i-n_i+1个互相独立的基本圈，它们的独立性是由于它们每一个都含有一个别的圈没有的弧的缘故。所以在图G中构造出了

$$\sum_{i=1}^{\rho}(m_i-n_i+1)=\sum_{i=1}^{\rho}m_i-\sum_{i=1}^{\rho}n_i+\rho=m-n+\rho$$

个独立圈。

其次我们再来构造$n-\rho$个独立的基本余圈。

在G_i中任取一点a_1，则$\omega(\{a_1\})$为基本余圈之和。故可从$\omega(\{a_1\})$的一个基本余圈$\omega_1^{(i)}$

中取一条弧$u_1^{(i)}$，并设$u_1^{(i)}$的另一顶点为a_2。

同理可在$\omega(\{a_1, a_2\})$中选一个基本余圈$\omega_2^{(i)}$，并在ω_2^i中取一条弧$u_2^{(i)}$，并设$u_2^{(i)}$的另一端点为a_3，注意：$a_3\overline{\in}\{a_1, a_2\}$。

将此手续重复n_i-1次之后，得到n_i-1个基本余圈：

$$\omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}, \cdots, \omega_{n_i-1}^{(i)} \qquad i=1, 2, \cdots \rho$$

再注意到它们每一个都含一个特殊弧，此弧不属于任何其它的基本余圈。从而在G_i中可以选出n_i-1个独立的基本余圈，因此在G中共可选出

$$\sum_{i=1}^{\rho}(n_i-1)=\sum_{i=1}^{\rho}n_i-\rho=n-\rho$$

个独立的基本余圈。

最后证明图G的圈秩数：$\nu(G)=m-n+\rho$；余圈秩数：$\lambda(G)=n-\rho$

由前两段的结果得$\nu(G)\geqslant m-n+\rho$，$\lambda(G)\geqslant n-\rho$故

$$\nu(G)+\lambda(G)\geqslant(m-n+\rho)+n-\rho=m$$

再由定理3.4，可得相反的不等式

$$m\geqslant\nu(G)+\lambda(G)$$

从而得

$$\nu(G)+\lambda(G)=m$$

所以

$$\nu(G)=m-n+\rho$$

$$\lambda(G)=n-\rho$$

三、平面图的圈基和余圈基

在图论中平面图具有更为直观、清晰的特性，这是由于它的线条布列互不相交的原故。对平面图的含义我们须要作进一步的解释。凡是能够在球面上用简单曲线画出的图$G=(V,U)$，只要是各边的交点均为顶点，那么我们就可以把这张图展示在平面上，而保持各边的交点均仍为顶点。今后称这种图为**平面图**。怎么把一个球面上的图展在平面上呢？为此，设想一个拓扑变换：我们在球面上任选一个不在图$G=(V,U)$的边上的一个点P（称它为无穷远点）；连接P与球心O之直径，设此直径的另一端点为Q。将Q点作为球与平面π的唯一接触点（切点），而后把P点从球面拿走，使球面在P的位置上出现一洞孔。最后我们把带洞孔的球面视为弹性的，逐渐把洞扩大，在此过程中不使球面破裂和重叠，一直把洞扩大到使洞的边缘连同整个球面单值地平铺在平面上为止，见图3—4。

在图3—4（a）上有一个（6，10）的图$G=(V, U)$；将洞孔P扩大成图3—4（b）。这时P点原位置扩大成C_p闭曲线（注：这条曲线仅仅在于显示洞孔扩大的边界，这条线本身不在图3—4（b）的开口曲面上）。最后把整个球面（除P点）展在平面π上，使C_p变为平面的边界（无限远处）。

这个图上标为S_1，S_2，…，S_5的部分叫作平面图的**有限面**，S_6（包含P点的那一部分）叫作它的**无限面**。对于平面图来说，各有限面的边界（今后称为**围道**），就构成圈空间的一组基底。例如图3—4为一个（6，10）图，它的圈秩

$$\nu(G)=m-n+1=10-6+1=5$$

它也恰好有5个围道。

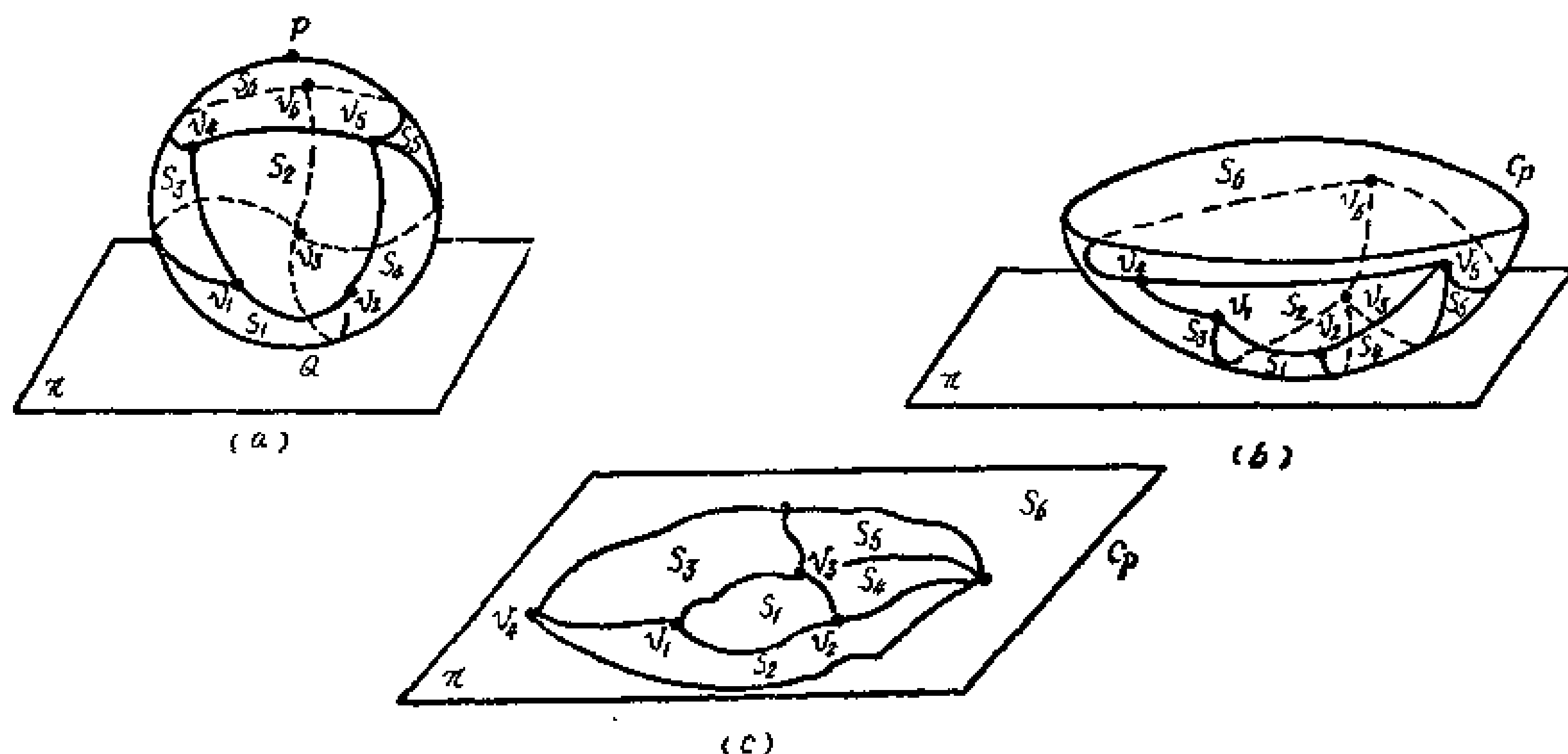


图3—4 平面图的拓扑变形

定理 3.7：在一个平面图G＝(V，U)中，所有有限面的围道组成一组圈基。

证明：当图的面数 $f=2$ 时，定理显然成立。今设图有 f 个面时定理成立，往证对于有 $f+1$ 个面的图定理也成立。

倘若所有的围道都没有共同弧，定理显然成立。今设弧 u 为两个围道所共有，将 u 从图G取出之后所得新图G′恰有 f 个面、$f-1$ 个围道。由假设G′的圈秩 $\nu(G')=f-1$（注意：f 个面中有一个无界面，它无围道）。将 u 放回之后使图的圈秩至多增大1，而又确实增加了1个。因若 C_1，C_2，$\cdots C_{f-1}$ 为G′中互独立的 $f-1$ 个围道，不失一般性，设 u 与 C_1 在G中构成两个相邻的围道 C_{11} 及 C_{12}，倘若 C_{11}，C_{12}，C_2，$\cdots$，C_{f-1} 非互相独立，则必有

$$C_{12}=C_{11}+a_2C_2+\cdots+a_{f-1}C_{f-1}$$

其中 a_2，$\cdots$，a_{f-1} 为零成1，在上式两端加上 C_{11} 时得

$$C_1=a_2C_2+\cdots+a_{f-1}C_{f-1}$$

此与 C_1，C_2，$\cdots C_{f-1}$ 为G′的一组圈基矛盾。故 $\nu(G)=f$，即含 $f+1$ 个面的图G的全体围道构成一组圈基。

定理 3.8：（欧拉公式）：一个连接的（n，m）平面图G，有 f 个面时，则恒有

$$f-m+n=2$$

证明：由定理3.7得 $\nu(G)=f-1$；再由定理3.6所得结果

$$\nu(G)=m-n+1$$

比较上列二结果即得所证。

例 3.2：试证 $K_{3,3}$ 不是平面图。

证明：倘若 $K_{3,3}$ 是平面图。则由于顶点数 $n=6$，边数 $m=9$，故其圈秩 $\nu(K_{3,3})=m-n+1=9-6+1=4$，面数 $f=\nu(K_{3,3})+1=5$。另一方面由于每一围道至少有四条边、四个顶点，而每一顶点又与3个面接触，所以有关系式

$$3n\geqslant 4f$$

故应有

$$18\geqslant 20$$

这个矛盾来源于"倘若 $K_{3,3}$ 为平面图"的假设。故 $K_{3,3}$ 不是平面图。

推论 3.1：一个单纯平面图G(V，E)，必有一顶点 v 使 $d_G(v)\leqslant 5$。

证明：不失一般可设图为连接的。由图的单纯性可知每一围道至少有三条边。由图G构

造它的面-线关联图（A，E_1，B），其中A为G的面的集合；B为G的边的集合。规定

$$[a, b] \in E_1$$

如果边 b 为面 a 的边界，显然图（A，E_1，B）的弧集 $\omega(A)$ 满足条件

$$3f \leqslant |\omega(A)| \leqslant 2m$$

上列第一个不等式基于G图为单纯图。

倘若在图G＝(V，E)中各顶点之次数均大于5，则 $n \leqslant \frac{2m}{6}$，于是由欧拉公式得，

$$2 = n - m + f \leqslant \frac{m}{3} - m + \frac{2m}{3} = 0$$

此为矛盾。所以G中至少有一个顶点 v 满足条件 $d_G(v) \leqslant 5$。

为了把圈和余圈的概念及其内部联系弄清楚，我们引入平面图的对偶概念。

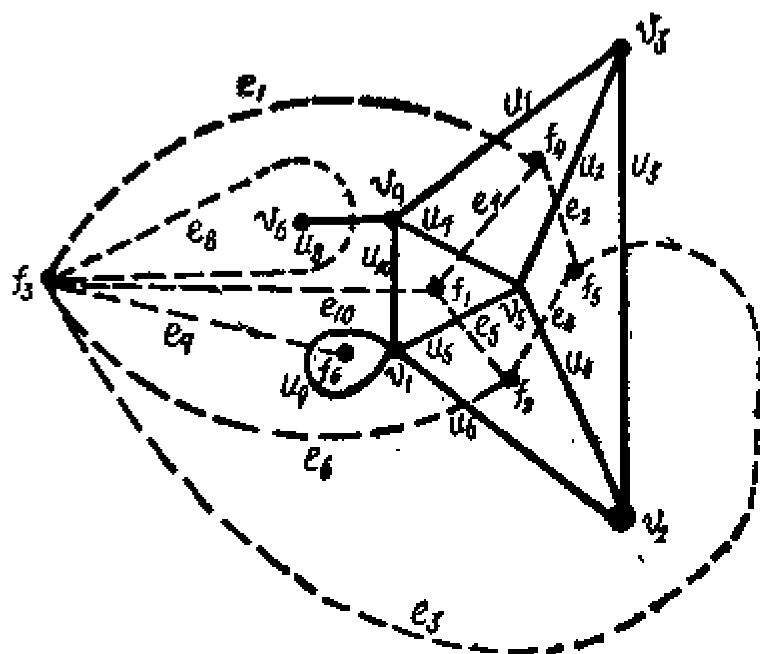
设G＝(V，U)为一个平面连接图，其阶数 $n \geqslant 2$。按下列方法构造的平面图 $G^* = (V^*, U^*)$ 叫作图G的**对偶**（见图3—5）。

在图G（用实点表示它的顶点 v_i；实线表示它的边）的每一个面里放一个点 f_i，于是得 G^* 的顶点集 $V^* = \{f_1, f_2, \cdots, f_6\}$。对于G中每一边 u，构造 G^* 的一条边 e：若 u 为面 f_i 与 f_j 的公共边，则 e 连接 f_i 与 f_j，并用虚线表示 e。易见：

（1）G^* 也是平面连接图；

（2）G^* 的对偶为G，即 $(G^*)^* = G$；

（3）G的环对应于 G^* 的一条悬吊边（边的一个端点之次数为1时谓之）。反之亦然（如图3—5中的 u_9 与 e_9；u_8 与 e_8）。



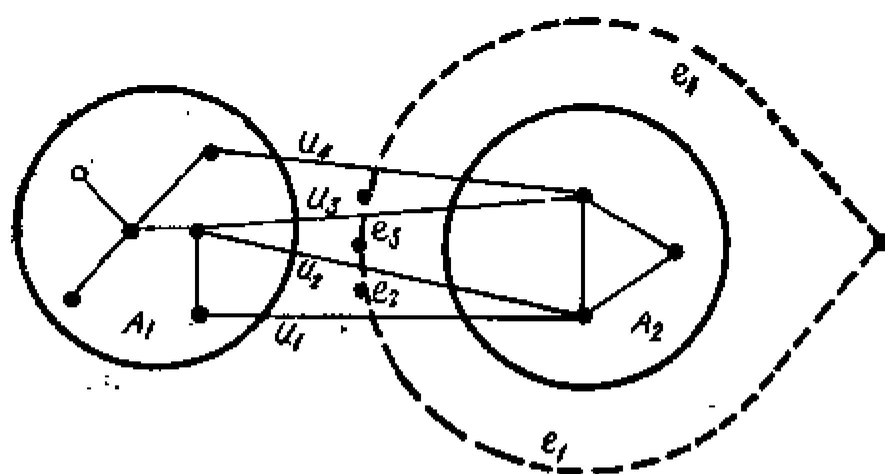


图3—5 对偶图

图3—6 对偶图

定理 3.9：连接的多重平面图G的每个基本圈，对应于它的对偶 G^* 的基本余圈。反之亦然。

证明：设 $\mu = (u_1, u_2, \cdots)$ 为G的一个基本圈，设 A^* 是此圈内部 G^* 中的顶点集。令

$$\omega(A^*) = \{e_1, e_2, \cdots\}$$

由于在 G^* 中由 A^* 所决定的子图 $G^*_{A^*}$ 是连接的。这是因为由 μ 的内部任一个面都可到达 μ 中其它各面的缘故；同理 $G^*_{V^*-A^*}$ 也是 G^* 的连接子图，故 $\omega(A^*)$ 为一基本余圈。

今设 $\omega = \omega(A_1)$ 为G的基本余圈，A_1 及 A_2 为U的一个分割。由于 G_{A_1} 与 G_{A_2} 的连接性和G的平面性，可以将 $\omega = \{u_1, u_2, \cdots\}$ 中的元，视为依序编号的。于是 $\mu^* = (e_1, e_2, \cdots)$ 为 G^* 的基本圈（见图3—6），再由 $(G^*)^* = G$ 可知，G^* 的每一基本圈对应于G的一个基本

余圈；G^*的每一基本余圈对应于G的一个基本圈。

推论 3.2：对于一个连接的平面图G恒有

$$\nu(G^*)=\lambda(G),$$
$$\lambda(G^*)=\nu(G)。$$

四、树和余树

定义 3.6：图$G=(V, U)$的一个延伸子图$H=(V, W)$满足条件：

（1）H不含G的基本余圈；

（2）倘若将$U-W$中任一弧u加入W之后，$H\cup\{u\}$包含G的一个基本余圈。

则称H为图G一棵**余树**。

定理3.10：设$G=(V, U)$为一个连接图，并设U_1与U_2为G的弧集的一个分割：

$$U=U_1\cup U_2,$$
$$U_1\cap U_2=\phi$$

则$H=(V, U_2)$为余树的充分必要条件是$T=(V, U_1)$为树。

证明充分性：设$T=(V, U_1)$是树，分两步往证$H=(V, U_2)$为余树。第一步，证明H没有余圈。倘若U_2中包含G的一个基本余圈$\omega(A)$，则在树T中从顶点集A不能到$V-A$，此与T为树矛盾。第二步，证明任取$u\in U_1$，则$U_2\cup\{u\}$必包含G的余圈。由树的特征T_5，知道图$(V, U_1-\{u\})$有两个连接分支。设它们是由V的分割A_1、A_2决定。则$\omega(A_1)$为G的基本余圈。而且

$$\omega(A_1)\subset U_2\cup\{u\}$$

于是充分性得证。

必要性：设$H=(V,U_2)$为余树。我们以下用色弧引理来证明$T=(V, U_1)$为树。

首先证明T无圈。设$u_1\in U_1$，并将u_1着黑色，而将$U_1-\{u_1\}$中弧均着红色，将U_2中弧均着绿色。由于H为余树，故G有一个包含u_1的黑、绿弧构成的余圈，从而不能再有包含u_1的红、黑弧构成的圈。由于u_1在U_1中的任意性，故T上无圈。

其次证明，若$u_2\in U_2$，则$U_1\cup\{u_2\}$中必含有圈。将u_2着黑色，尽将U_1中弧着红色，将$U_2-\{u_2\}$中弧着绿色。由于G中没有含u_2的黑、绿余圈，所以必有含u_2的黑、红圈。由树的特征T_4得知T为树。

五、定向问题

在铁路运输网中，不论是单线还是双线，从图的角度看都可以认为是单纯(无向)图。因为双线是严格区分上、下行，所以图仍然是1-图，区别仅在于双线上的容量加大。在单纯图上经常需要考虑从某指定的顶点v_1出发，标出到其它任意点的一条有向路。这个问题不论在工业生产中还是在设计中都常碰到。

定义 3.7：一个满足下列条件的图$G=(V,U)$叫作**有根树**：

r_1：G为一个树；

r_2：存在一个顶点a，对G中任一其它顶点$v\in V$都存在由a到v的基本路$P_{a,v}$，并称a为树的根。

例 3.3：在图3－7（b）中给出了一个单纯图$G=(V,U)$。在其中任意指定一点，设为v_1。

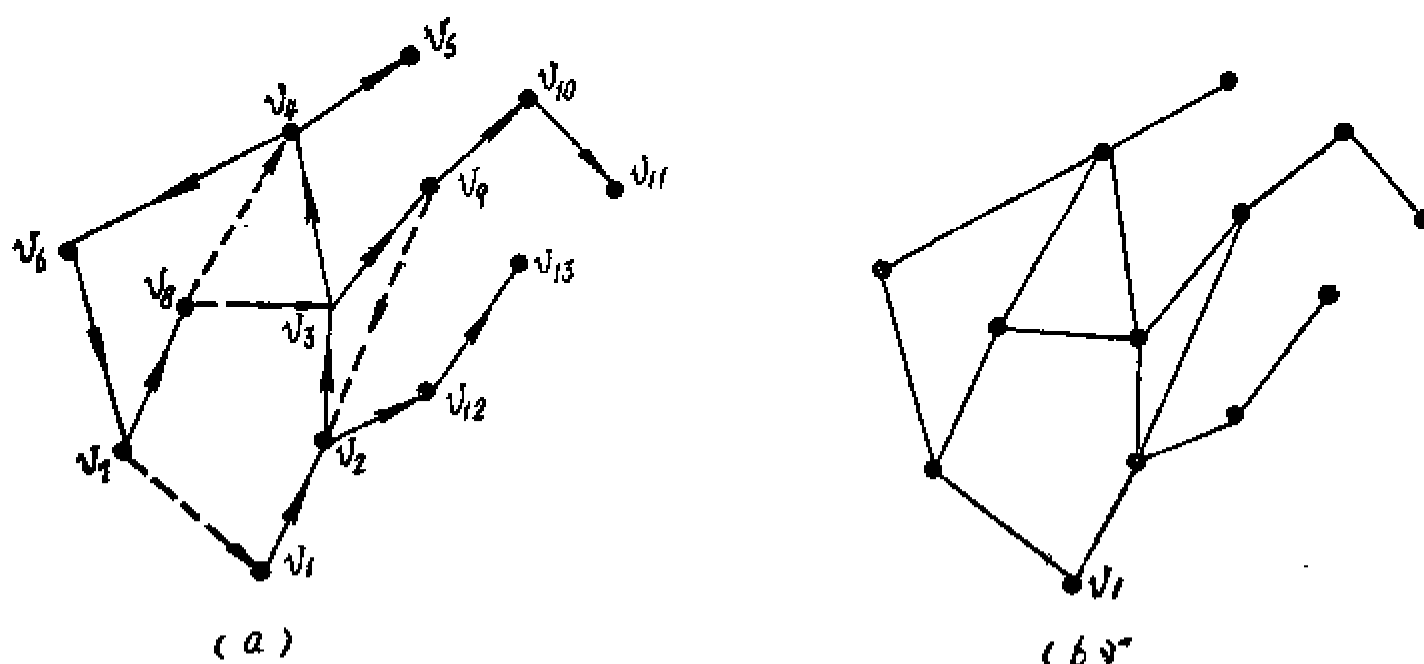


图3—7　图的定向

（1）试标定一个以v_1为根的延伸树$R=(V,W)$；

（2）对$U-W$中弧也标定方向，使它们与R的结合圈均为回路。

解：任取与v_1相邻的一个元为v_1的后继元，设为v_2，并标定弧的方向为(v_1, v_2)。而后在与v_2相邻的各点$\Gamma_G(v_2)$中，任取一个不在$\{v_1, v_2\}$中的元v_3。在与v_3相邻的各点$\Gamma_G(v_3)$中取一个不在$\{v_1, v_2, v_3\}$中的元v_4、同理得v_5。这时$\Gamma_G(v_5)\subset\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，称这种顶点$v_5$为**折返的**。而后从$v_5$沿路$P_{1,5}=(1, 2, 3, 4, 5)$返回依次检查，查$v_4$不是折返的。于是在$\Gamma_G(v_4)-\{P_{1,5}\}$中任取一点$v_6$（也用$P_{1,5}$表示此路上的顶点集）；在$\Gamma_G(v_6)-\{P_{1,5}, v_6\}$中任取一点$v_7$；同理得$v_8$。由于$\Gamma_G(v_8)\subset\{P_{1,5}, v_6, v_7, v_8\}$，故$v_8$为折返的。至此由图可知$v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$均为折返的：

$$\Gamma_G(v_i)\subset\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\},\quad i=4, 5, 6, 7, 8$$

即当$i=4, 5, 6, 7, 8$时，与v_i相邻的各点全在已标号的顶点中。

当一条从v_1出发的路，如$P_{1,5}$，的端点为**折返点**时，称此路为**闭端路**。于是$P_{1,5}$和$P_{1,8}=(v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8)$均为闭端路。

如v_3为非折返点，同上法可得路$P_{1,11}=(v_1, v_2, v_3, v_9, v_{10}, v_{11})$。$v_2$为非折返点，可得路$P_{1,13}=(v_1, v_2, v_{12}, v_{13})$。

到此所得4条路$P_{1,5}$，$P_{1,8}$，$P_{1,11}$，$P_{1,13}$上每一个顶点都是折返点。从而我们把这些路都叫作**折返路**。它们的并，就是以v_1为根的延伸树$R=(V,W)$。为了进一步讨论，我们需要给出节点的定义。

定义3.8：图上顶点的次数$\geqslant 3$时，称这种顶点为**节点**。

特别强调指出：以v_1为根的树R上，任何分别在两个折返路上从节点到末端两枝中的两点，在G中都不会相邻。例如图3—7（a）中$P_{1,5}$与$P_{1,8}$两条路上的$\{v_5\}$与$\{v_6, v_7, v_8\}$之间在G中不相邻：

$$m_G(\{v_5\}, \{v_6, v_7, v_8\})=0$$

同理
$$m_G(\{v_4, v_8\}, \{v_9, v_{10}, v_{11}\})=0$$
$$m_G(\{v_3, v_4, v_6, v_7, v_8\}, \{v_{12}, v_{13}\})=0$$

等等。或者说任何一条折返路上的顶点在G中，与此路之外的一切点均不以$U-W$中边相联。

而后对任一边$e\in U-W$。当$e=[v_i, v_j]$时，$i<j$。可知v_i及v_j必在同一条折返路上，于是我们给边$[v_i, v_j]$以方向：从v_j到v_i（自大指标号到小指标号）得弧(v_j, v_i)，例如图3—7（a）上用虚线所画各弧。

由图3—7（a）可见任何一个与有根树相结合的基本圈全是基本回路。而且G在定向之后所得图$\overrightarrow{G}$的所有基本回路都是与R相结合的。

定理3.11：设$G=(V，E)$是一个单纯图，$v_1\in V$。则可给每一条边指出一个方向，使得新图$\overrightarrow{G}=(V，U)$：

（1）包含一个以v_1为根的延伸树$R=(V，W)$；

（2）与R相结合的圈为回路；

（3）$\overrightarrow{G}$的基本回路都是与R相结合的。

证明：设已有一个顶点子列

$$v_1，v_2，\cdots，v_i，\qquad i=1，2，\cdots。$$

确定一个最大的脚号j使

$$\Gamma_G(v_j)-\{v_1，v_2，\cdots，v_i\}，\qquad 1\leqslant j\leqslant i$$

非空，并取

$$v_{i+1}\in\Gamma_G(v_j)-\{v_1，v_2，\cdots，v_i\}$$

再将边$[v_j，v_{i+1}]$标上从顶点v_j到v_{i+1}的方向，得有向弧（$v_j，v_{i+1}$），由于图G的有限性和连接性，这种找新顶点的手续必可在有限步之后停止，且任一顶点都被纳入序列。

当上列手续终止时，有向弧构成的图形$R=(V，W)$为一个以v_1为根的树。这是因为R是连接的、无圈的（见定义3.4），故为树；又在R上由v_1可以到达G的每一顶点。

由v_1到图R的终点集T_R中每一顶点有唯一的一条路，称这种路为折返的。由R中各顶点的标号过程可见，尚未定向的每一条边的两个顶点只能在同一条折返路上。

设$e=[v_i，v_j]$是尚未定向的边，$i<j$。则将e定向为从v_j到v_i，得弧（$v_j，v_i$）。于是得$G=(V，E)$的定向图$\overrightarrow{G}$，而R为$\overrightarrow{G}$的延伸子树。故$\overrightarrow{G}$中与R相结合的基本圈都是基本回路。

最后来证明$\overrightarrow{G}$的任一基本回路μ都是与R相结合的。设若不然，则μ中至少要有两个弧$u=(v_{i+p}，v_i)$，$u'=(v_{j+r}，v_j)$不在R上。而u及u'的相对位置只有两种情况：一是弧u及u'的顶点都在同一条折返路上；二是在不同的折返路上。但由图3—8可见，不论是哪种情况都与μ为基本回路的假设矛盾，故μ是与R相结合的回路。

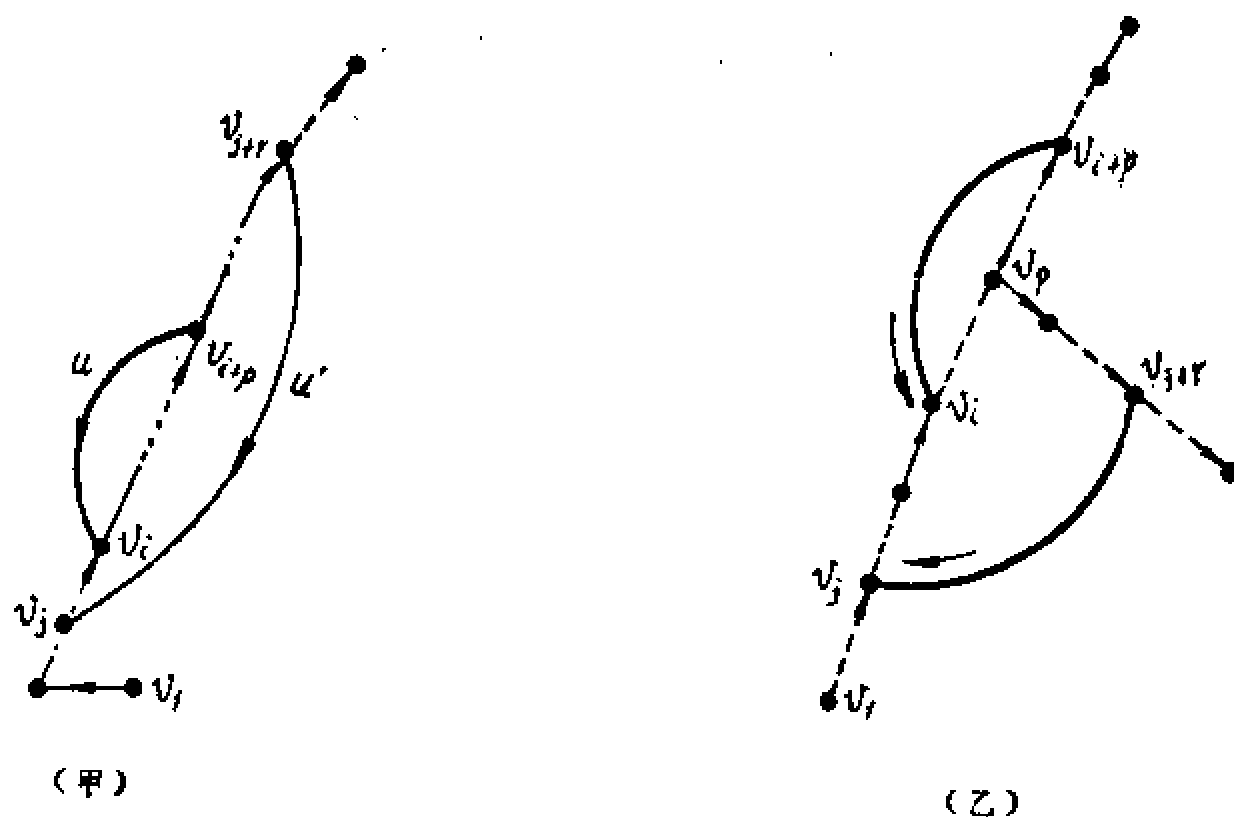


图3—8　结合回路

第三节　树 的 计 数

凡是经拓扑变换可以变为平面的曲面都叫作**拓扑平面**。设某拓扑平面上有 n 个点，我们想把它们用树（边最少）联起来，问有多少种不同的联法？我们设想有一个以此 n 个点组成的 K_n 集团，那么在一个已知图 $G(=K_n)$ 里有多少不同的延伸子树？ 这个问题在实践中有多方面的应用。例如某地区有 n 个地址，我们希望把它们用某种线路连接起来，问有多少不同的方案，就属于这类问题。由此可以进一步提出一个问题：如何连接才使线路最短？本节就来论述这些问题。

一、具有指定次数的树的计数问题

我们首先考虑多项分布的一些性质。

性质 3.6：将 n 个不同的物体，分为 p 堆，使各堆数目依次为 n_1，n_2，…，n_p，则不同的分法为

$$\binom{n}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_p}=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\cdots\cdot n_p!}$$

证明：第1堆的不同取法为 $\binom{n}{n_1}$ 种；第2堆为 $\binom{n-n_1}{n_2}$ 种；最后一堆的取法为 $\binom{n_p}{n_p}$ 种。由组合的乘法定理可得，总数为

$$\frac{n!}{n_1!\cdot(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!\ (n-n_1-n_2)!}\cdot\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!\ (n-n_1-n_2-n_3)!}\cdot\cdots\cdot\frac{n_p!}{n_p!}$$

$$=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\cdots\cdot n_p!}=\binom{n}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_p}$$

性质 3.7：（多项展式），对任意 p 个实数 a_1，a_2，…，a_p 恒有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_p)^n=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_p=n}\binom{n}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_p}a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot a_p^{n_p}$$

证明：因为 $(a_1+a_2+\cdots+a_p)^n$

$$=\underbrace{(a_1+a_2+\cdots+a_p)\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_p)\cdot\cdots\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_p)}_{n\text{个}}$$

即 $(a_1+a_2+\cdots+a_p)^n$ 为 n 个因子之积。在这个展式中 $a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot a_p^{n_p}$ 的出现可认为是将上列 n 个因子分为 p 堆，使各堆因子数依次为 n_1，n_2，…，n_p，而后从第 $i=1$，2，…，p 堆中每个因子里都取第 i 个加项 a_i，故得 $a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot a_p^{n_p}$。所以在展式中 $a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot a_p^{n_p}$ 的系数等于将 n 个不同*的物体分为 p 堆：n_1，n_2，…n_p 的不同方式数，由性质3.6得证。

我们知道二项分布里有公式

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}$$

用这里的记号就是

$$\binom{n}{n_1,n_2}=\binom{n-1}{n_1-1,n_2}-\binom{n-1}{n_1,n_2-1}\qquad(n_1+n_2=n)$$

*因为各因子都有特定的位置，故应认为是不同的。

它的正确性由下列看法是明显的：把 n 个不同物体分为两组（记为 $n=n_1+n_2$）的不同方式的总数为 $\binom{n}{n_1,n_2}$。另一方面把其中一件物品特殊化、称为特物。于是特物在 n_1 堆里的组合数为 $\binom{n-1}{n_1-1,n_2}$，在 n_2 堆里的组合数为 $\binom{n-1}{n_1,n_2-1}$，故根据组合的加法律得

$$\binom{n}{n_1,n_2}=\binom{n-1}{n_1-1,n_2}+\binom{n-1}{n_1,n_2-1}$$

把这种思想方法推广到 P 堆就有下面的性质。

性质 3.8： $$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_p}=\sum_{n_i\geqslant 1}\binom{n-1}{n_1,n_2,\cdots,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},\cdots,n_p}$$

在这些基础上，就可计算具有指定次数的不同树的数目。

定理3.12： 设 T（n；d_1，d_2，…，d_n）表示以 v_1，v_2，…，v_n 为顶点，且指定 $d_T(v_i)=d_i$ 时，$i=1$，2，…，n 不同树的数目，则

$$T(n;\ d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n)=\binom{n-2}{d_1-1,d_2-1,\ \cdots,\ d_n-1}$$

证明：当 $n=2$ 时，（$d_1=d_2=1$）定理为真（注意：$\frac{0!}{0!\ 0!}=\frac{1}{1\cdot 1}=1$）。

设 $n=k$ 时上式为真。

查 $n=k+1$ 的情况。不失一般可设 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_{k-1}=d_k=d_{k+1}=1$（由定理3.4可知 $d_{k+1}=d_k=1$）。而第 $k+1$ 个顶点 v_{k+1} 上的这条边可以联在任何一个次数 >1 的顶点上，故由组合加法定理得

$$T(k+1;d_1,d_2,\cdots,d_k,d_{k+1})=\sum_{d_i\geqslant 2}T(k;d_1,\cdots,d_{i-1},d_i-1,d_{i+1},\cdots,d_k)$$

由假设

$$=\sum_{d_i\geqslant 2}\binom{k-2}{d_1-1,\cdots,d_{i-1}-1,d_i-2,d_{i+1}-1,\cdots,d_k-1}$$

由性质 3.8 得

$$=\binom{k-1}{d_1-1,\cdots,d_{i-1}-1,d_i-1,\cdots,d_k-1}$$

$$=\binom{(k+1)-2}{d_1-1,\cdots,d_i-1,\cdots,\ d_{k+1}-1}$$

故定理对于 n 的任何值均成立。

由此定理可以立刻得到开勒（Cayley）在早期得到的一个结果。

推论 3： 有 n 个顶点的不同树的数目为 n^{n-2}。

证明：总数应为 $T(n;\ d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n)$ 对一切可能的 d_1，…，d_n 求和：

$$\sum_{d_1,\cdots,d_n\geqslant 1}T(n;\ d_1,\cdots,d_n)=\sum_{d_1,\cdots,d_n\geqslant 1}\binom{n-2}{d_1-1,\cdots,d_n-1}$$

在性质3.7中将 n 换成 $n-2$，而项数 $P=n$，再取 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 则得上式右端之值

$$\sum_{d_1,\cdots,d_n\geqslant 1}\binom{n-2}{d_1-1,\cdots,d_n-1}=n^{n-2}$$

证明：设已有一个顶点子列

$$v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{i},\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,$$

二、已知图延伸子树的计数问题

设G＝(V, U)为一（无环）图，它的结合矩阵为（见定义2.22）：

$$A=[a_{ij}]$$

定义 3.9：对于（无环）图G＝(V,U)定义

$$d_{ij}=\begin{cases}0 & \text{如 } i\neq j,\\ \sum\limits_{r\neq i} a_{ri}, & \text{如 } i=j。\end{cases}$$

并称矩阵D＝(d_{ij})为图G的内半次矩阵。

查矩阵

$$D-A=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i\neq 1}a_{i1} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \sum\limits_{i\neq 2}a_{i2} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \sum\limits_{i\neq n}a_{in}\end{bmatrix}$$

易见D－A的每一列之和均为零，故它的行列式应为零。下列子式对于计算延伸子树具有十分重要的意义。

$$\varDelta_1=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i\neq 2}a_{i2} & -a_{23} & -a_{24} & \cdots & -a_{2n}\\ -a_{32} & \sum\limits_{i\neq 3}a_{i3} & -a_{34} & \cdots & -a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ -a_{n2} & -a_{n3} & -a_{n4} & \cdots & \sum\limits_{i\neq n}a_{in}\end{vmatrix}$$

引理 3.1：设G(V,U)有n个顶点、$m=n-1$条弧（无环）。则G是一个以v_1为根的树的充分必要条件是$\varDelta_1=1$，否则$\varDelta_1=0$。

证明：必要性。设G为一个以v_1为根的树，我们约定沿着每一条路的走向，自小而大的为每一个顶点编号。于是当$i>j$时$a_{ij}=0$。而且除v_1之外的每一个顶点v_i恒有$d^-_G(v_i)=1$，从而$\varDelta_1$取下列形式，故其值为1：

$$\varDelta_1=\begin{vmatrix}1 & -a_{23} & -a_{24} & \cdots & -a_{2n}\\ 0 & 1 & -a_{34} & \cdots & -a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1$$

充分性。设$\varDelta_1=1$，则必每一列均为非零矢（否则其行列式为零）。这说明每一顶点$v_{i\geqslant 2}$的内半次均大于零，而题设$m=n-1$，故图G的内半次之和

$$\sum_{i=1}^{n} d_{\bar{G}}^{-}(v_i) = n-1$$

因此断言$d_{\bar{G}}^{-}(v_i)=1$，$i=2$，3，…，n。$d_{\bar{G}}^{-}(v_1)=0$，即各弧的布列是这样的：从v_1起作若干弧达一群新顶点；再从这些新顶点起作若干弧达若干新顶点。总之每作一弧达一新顶点，所以$n-1$条弧从v_1起把一切点都连起来了。从而G是具有$n-1$条弧的连接图，故由树的特征T_3知G是一个以v_1为根的树。

细审充分性的证明过程，如以"设$\Delta_1 \neq 0$"代替"设$\Delta_1=1$"。则仍可得结论："G是一个以v_1为根的树"。从而$\Delta_1 \neq 0$等价于$\Delta_1=1$。换句话说，G不是以v_1为根的树的充分必要条件是$\Delta_1=0$，引理证毕。

定理3.13：设$G=(V,U)$是一个图，则G的以v_1为根的树共有Δ_1个。

证明：须知图的内半次矩阵D也是利用结合矩阵A的元构成的。从而$D-A$及Δ_1均为由A构成起来的。今以$\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\cdots,\mathbf{a}_n$表示结合矩阵A的后$n-1$个列矢：

则可知$\Delta_1=\Delta_1(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\cdots,\mathbf{a}_n)$为其各列矢的线性函数满足下列性质：

可加性。$\Delta_1(\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_i'+\mathbf{a}_i'',\cdots\mathbf{a}_n)=\Delta_1(\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_i',\cdots,\mathbf{a}_n)+\Delta_1(\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_i'',\cdots\mathbf{a}_n)$

齐次性。$\Delta_1(\mathbf{a}_2,\cdots,\lambda\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n)=\lambda\Delta_1(\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n)$

今令$e_k=\{0,\cdots,0,1,0,\cdots,0\}$即第$k$个元为1，其余元均为零的列矢。于是有

$$\Delta_1(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\cdots,\mathbf{a}_n)=\Delta_1\Big(\sum_{k_2\neq 2}a_{k_2,2}\,e_{k_2},\ \sum_{k_3\neq 3}a_{k_3,3}e_{k_3},\ \cdots,\ \sum_{k_n\neq n}a_{k_n,n}e_{k_n}\Big)$$

$$=\sum_{k_2\neq 2,\ k_3\neq 3,\ \cdots,\ k_n\neq n} a_{k_2,2}\cdot a_{k_3,3}\cdot\cdots\cdot a_{k_n,n}\Delta_1(e_{k_2},e_{k_3},\cdots,e_{k_n})$$

与$\Delta_1(e_{k_2},e_{k_3},\cdots,e_{k_n})$相对应地构成一个图$G_0$，它的仅有的$n-1$个弧为$(v_{k_2},v_2)$；$(v_{k_3},v_3)$；…；$(v_{k_n},v_n)$

这个图G_0是一个有n个顶点、$m=n-1$条弧的（无环）图，从而由引理得知$\Delta_1(e_{k_2},e_{k_3},\cdots,e_{k_n})$的值为1或零。而且它等于1的充分必要条件是它对应G的一个以v_1为根的延伸树G_0，从而定理得证。

推论4：设$G=(V,E)$为一单纯图，则它的延伸子树的数目，等于下列n阶矩阵$B=[b_{ij}]$的子式Δ_1：

$$b_{ij}=\begin{cases} d_G(v_i) & \text{如果}\ i=j \\ -1 & i\neq j\ \text{但}[v_i,v_j]\in E \\ 0 & i\neq j\ \text{但}[v_i,v_j]\overline{\in} E \end{cases}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} d_G(v_2) & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & d_G(v_3) & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n2} & b_{n3} & \cdots & d_G(v_n) \end{vmatrix}$$

证明：把G的每一条边用一对方向相反的弧代替，设所得图为$\overrightarrow{G}$。由于G的延伸子树，

与$\overrightarrow{G}$的以v_1为根的树的1-1对应关系可知，G的延伸树共有Δ_1个。

第四节　最　短　树

一、问题的提出

如果想用铁路网把一组城市联接起来，而不允许铁路在城市之外相交，又要使线路总长最短。用图论的语言来说就是要把n个有固定位置的点，用最短树连接起来。又如在印刷电路板上的特定位置有n个端点，需要将它们用电路连接起来，并且不允许线路在非节点上相交，如何连接才使线路最短?

至于如何确定最短树，显然必须放弃穷举法。因为定理3.12的推论3已算出连接n个顶点的树的数目为n^{n-2}个，即便$n=30$，30^{28}也要有42位，所以即使应用最现代化的计算机，在我们有生之年也是无法计算的，所以从理论上对最短树的探讨是十分必要的。为方便计，我们以下总设任意两点间的距离均不相等；在相反的情况下，我们可以选取远小于最小计长单位的数值$\varepsilon>0$，并用$l+\varepsilon$和l来代替原来两个相等的距离l。这样作从实用观点看总是可能的，而且不改变最短树的实际长度。

二、最短树的性质

性质3.9：设v_j是一个与v_i距离最近的顶点，则$(v_i,\ v_j)$必在最短树上。

证明：设(v_i,v_j)不在最短树T上，则将它加到T上之后，必产生一个圈，如图3－9所示。

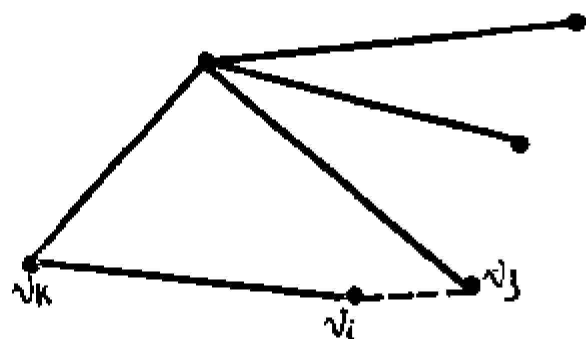


图3－9　最短树

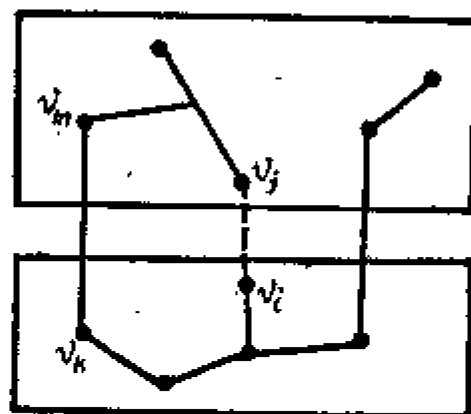


图3－10　最短树

在此圈上必有与顶点v_i相连的另一顶点v_k，由假设(v_k,v_i)比(v_i,v_j)长；从而当用(v_i,v_j)替代最短树T上的(v_k,v_i)时，所得仍为一树且比T更短，此与T为最短树相矛盾。故(v_i,v_j)在最短树上。

此性质可以推广如下。

性质3.10：设W及$\overline{W}$为顶点集V的一个分割：$V=W\cup\overline{W}$并设(v_i,v_j)为从W中的点到$\overline{W}$中点一切可能连线中最短的一条（其中$v_i\in W$，$v_j\in\overline{W}$）。则(v_i,v_j)必在最短树T上。

证明：设连接W与$\overline{W}$的最短线(v_i,v_j)不在最短树T上。则将(v_i,v_j)加到T上之后，必形成唯一的一个圈，如图3—10所示。

在这个圈上必有从W到$\overline{W}$中的另一线，设为(v_m,v_k)。将(v_m,v_k)从图中取走之后，所得的仍为一树且比T更短，此为矛盾。故(v_i,v_j)必在最短树上。

由最后这一性质容易导出一个产生最短树的方法：先任取一点v_1，令$W=\{v_1\}$，设从W到$\overline{W}$的最短线为（v_1,v_2）。将（v_1,v_2）画出后，令$W=\{v_1,v_2\}$，重复上列步骤直到W＝V为止。显然所得图是具有$n-1$条线的连接图，故所得为树。再由性质3.10可知此树最短。

三、最短树产生的程序

按上述方法连接n个指定点的最短树的*Fortran*程序如下：

```
C……此程序用来确定连接n个顶点的最短树。
    REAL X(50), Y(50), DIST(50,50);
    INTEGER NEAR(50,50), NUMBER(50), INW(50).
C……输入N及坐标、初始数组
    READ(5,1)N
1   FORMAT(IZ)
    DO 2 I=1,N
2   READ(5,3)X(I),Y(I)
3   FORMAT(2F10.5)
    DO 4 I=1,N
    NUMBER(I)=0
    INW(I)=0
    DO 4 J=1,N
    DIST(I,J)=SQRT ([X(I)-X(J)]**2+[Y(I)-Y(J)]**2)
4   NEAR(I,J)=0
C……打印出N、坐标、距离矩阵
    WRITE(6,11)N
11  FORMAT('1N=',I5)
    DO  12  K=1,N
12  WRITE(6,13)X(K),Y(K)
13  FORMAT('X=',E14.7,'Y=',E14.7)
    DO  14  K=1,N
14  WRITE(6,15)[DIST(K,L),L=1,N]
15  FORMAT[5('  ',F8.3)]
C……将顶点v1放在W中
    INW(1)=1
    NODES=1
7   DMIN=1.E10
C……为确定最短距离观察从W中的I到W中的J的所有点对。
    DO  5  I=1,N
    IF[INW(I).NE.1]GOTO 5
C……顶点I在W中
    DO  6  J=1,N
```

```
      IF[INW(J).EQ.1]GOTO 6
C……顶点J在W̄中
      IF[DIST(I,J).GE.DMIN]GOTO 6
      ISTAR=I
      JSTAR=J
      DMIN=DIST(I,J)
6     CONTINUE
5     CONTINUE
C……将线 (ISTAR,JSTAR) 添入，并将JSTAR放入W中
      M=NUMBER(ISTAR)+1
      NEAR(ISTAR,M)=JSTAR
      M=NUMBER(JSTAR)+1
      NEAR(JSTAR,M)=ISTAR
      NUMBER(JSTAR)=M
      INW(JSTAR)=1
      NODES=NODES+1
C……若未结束则返回
      IF(NODES.LT.N)GOTO7
C……打印出线[I,NEAR(I,J)]若NEAR(I,J)>I
      DO 10  I=1,N
      M=NUMBER(I)
      DO 8   J=1,M
      IF[NEAR(I,J).LE.I]GOTO8
WRITE(6,9)I,NEAR(I,J)
8     CONTINUE
10    CONTINUE
9     FORMAT('BRANCH',I2',TO',I 2)
      STOP
      END
```

以下我们说明上列程序的工作过程。

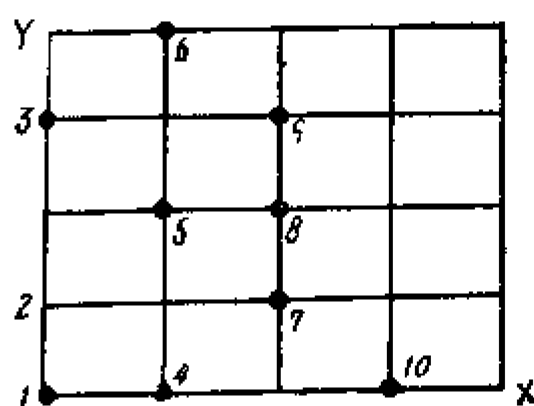
首先，存储地址是实的一维数组X(I)和Y(I)，它们分别为顶点I(即v_i)的x和y坐标。其次指定给实二维数组DIST(I,J)的地址表示顶点I和J之间的距离。当坐标输入之后，距离矩阵便可以计算出来。当此程序将树构造出来之后，就以邻接目录形式把它储存起来，数组*NOMBER*(I)表示与顶点I相邻的顶点数，即$NUMBER=d(I)$；而数组*NEAR*(I,J)是与顶点I相邻的第J个顶点。上述程序对于不超过50个顶点的问题提供了一个存储方法。

一维数组*INW*(I)指出顶点I是否在W之中；若顶点I在W中则*INW*(I)为1否则为零。

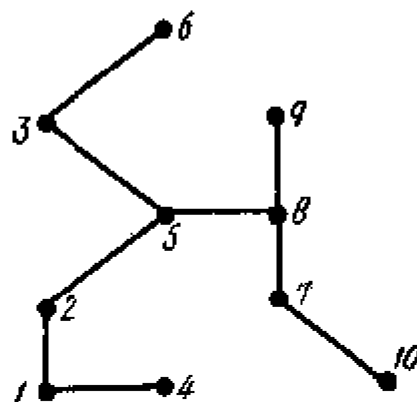
此程序由输入顶点数N开始执行，而后是坐标X(I)和Y(I)。其次，数组*NUMBER*(I)、*INW*(I)和*NEAR*(I,J)的初始值均为零，然后计算并填写距离矩阵*DIST*(I,J)。作完这些步骤之后，把N、坐标和距离矩阵都打印出来，一直到说明15。

令$INW(1)$等于1表示从V中的第一个顶点v_1开始，我们总用变元$NODES$表示V中的已归入W中的顶点的数目，起始时令$NODES=1$，当$NODES=N$时则止。

寻找从W中的顶点(称为$ISTAR$)到$\overline{W}$中点（称为$JSTAR$）的最短线的代码，是从说明7开始而直至说明5终止的。而后，将新线（$ISTAR,JSTAR$）添人树中，为此需及时校正$NOMBER$（$ISTAR$）、$NUMBER(JSTAR)$、$NEAR(ISTAR$，M）和$NEAR(JSTAR$,M)。然后由$INW(JSTAR)$等于1和使$NODES$增加1的方法，将顶点$JSTAR$放在W中。于此要鉴定$NODES$；若它小于N则返回到说明7，而寻找另一个新线并把它加到树上；若它等于N则停止，并在树上打印出此线。须知仅在$j>i$时我们才打印（i，j）；这表明每一线仅打印一次。



（a）坐标



（b）最短树

图3—11 最短树程序

图3—11作为一个例子给出了10个点的由最短树程序产生的图。它们的原始资料如下：

Col.11

10		…N
0.	0.	…X(1),Y(1)
0.	1.	…X(2),Y(2)
0.	3.	⋮
1.	0.	
1.	2.	
1.	4.	
2.	1.	
2.	2.	
2.	3.	
3.	0.	…X(10),Y(10)

在第一个卡上记录着顶点数N，其余的记录着坐标。当程序终止时的输出如下：顶点数N、坐标目录、$DIST$矩阵和解中的线。

N=10

X=0.0000000E	00	Y=0.0000000E	00
X=0.0000000E	00	Y=0.1000000E	01
X=0.0000000E	00	Y=0.3000000E	01
X=0.1000000E	01	Y=0.0000000E	00
X=0.1000000E	01	Y=0.2000000E	01

X＝0.1000000E 01 Y＝0.4000000E 01
X＝0.2000000E 01 Y＝0.1000000E 01
X＝0.2000000E 01 Y＝0.2000000E 01
X＝0.2000000E 01 Y＝0.3000000E 01
X＝0.3000000E 01 Y＝0.0000000E 00

0.000	1.000	3.000	1.000	2.236	4.123	2.236	2.828	3.606	3.000
1.000	0.000	2.000	1.414	1.416	3.162	2.000	2.236	2.828	3.162
3.000	2.000	0.000	3.162	1.414	1.414	2.828	2.236	2.000	4.243
1.000	1.414	3.162	0.000	2.000	4.000	1.414	2.236	3.162	2.000
2.236	1.414	1.414	2.000	0.000	2.000	1.414	1.000	1.414	2.828
4.123	3.162	1.414	4.000	2.000	0.000	3.162	2.236	1.414	4.472
2.236	2.000	2.282	1.414	1.414	3.162	2.000	1.000	2.000	1.414
2.282	2.236	2.236	2.236	1.000	2.236	1.000	0.000	1.000	2.236
3.606	2.282	2.000	3.162	1.414	1.414	2.000	1.000	0.000	3.162
3.000	3.162	4.243	2.000	2.828	4.472	1.414	2.236	3.162	0.000

BRANCH 1 *TO* 2
BRANCH 1 *TO* 4
BRANCH 2 *TO* 5
BRANCH 3 *TO* 5
BRANCH 3 *TO* 6
BRANCH 5 *TO* 8
BRANCH 7 *TO* 8
BRANCH 7 *TO* 10
BRANCH 8 *TO* 9

这个例子与最短树程序所要求的条件："任意二顶点间的距离不等"不符。当然可以事先将各点间的距离稍加改变，但也可以不改变而采用以下办法：当顶点v_i与两个以上的点的距离均为最小时，可以任选其一为v_j，$j=i+1$。这样构造出来最短树的总长不变比较容易证明，只是答案并非唯一。例如在上列例子中，我们可以用（4.7）来代替（2.5）仍得最短树。

四、上列程序产生最短树的证明

设选出的线依次为$u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$，并设B为这些线所产生的图，T为最短树。

首先指出B是一个树。这是因为B有$n-1$条线，而且是连接的。

其次证明B就是最短树T。倘若B≠T。设u_k是$u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$中第一个不在T中的线，把u_k加到T上，所得图T′有唯一的一个圈。由于B为树，所以此圈中至少有一条线设为e不在B中。把e从T′中取出后设得到图T″。由于$u_1,u_2,\cdots,u_{k-1}$均在T中，故它们不会形成圈，所以e比u_k要长，否则e就应当在$u_1,u_2,\cdots$，u_k之中。从而T″是一个比T还要短的树，这与T为最短树矛盾。

第五节 与树有关的问题

关于树的研究不论在理论和应用方面均极广泛，除上列已讲到的一些问题之外，再指出以下各问题供参考。

一、最短树的其它构造方法——Kruskal（柯若斯凯尔）方法

该方法分四步：

（1）把所有的边以边长之增序记录下来；

（2）选出最短的一条边；

（3）在所有未选到的边中，选出满足以下条件的最短边，即保证它和已选出的边不会形成圈；

（4）重复步骤（3），一直到选出 $n-1$ 条边为止。

这个方法在假设各边长均不相等的条件下，可以证明最短树是唯一的。证法同第三章第四节之四。

二、用电子计算机存储树的方式

下面介绍定位二元树方法，其要点如下。

若$T=(V,\Gamma)$ 是一个以v_1为根的有向树，称$\Gamma_{(v_1)}$中的元为树T上的一阶点；若$v_2\in\Gamma_{(v_1)}$，$v_3\in\Gamma_{(v_2)}$则称v_3为**二阶点**，同理可以定义树T上的k阶点$k=1,2,\cdots,(\leqslant n-1)$。对任一顶点$v$称$\Gamma_{(v)}$内的点之间具有同胞关系。若对任一顶点$v\in V$，恒有$|\Gamma_{(v)}|\leqslant r$，则称此树T为**r元树**。若$|\Gamma_{(v)}|=r$或0对一切$v\in V$成立，则称此树为**完全r元树**。若将树的根放在顶部并将各点之子（即后继元）自左至右给以固定次序，则称此树为**定位r元树**或称为**典型r元树**。

图3—12为典型完全二元树。它的各点编号规定为由上而下，自左而右。“0”表示左；“1”表示右。第k阶点的标码恰有k个数码，其前$k-1$个数码恰为其先行元的标码。这种表示法是便于电子计算机存储的方式。倘若能把一般的树与二元树1-1对应起来，则一般树的存储问题也是可以用此种方式存储的。以下给出这种对应法则：

设有一个有向树T如图3—13所示，由此分别构造图3—14及图3—15。

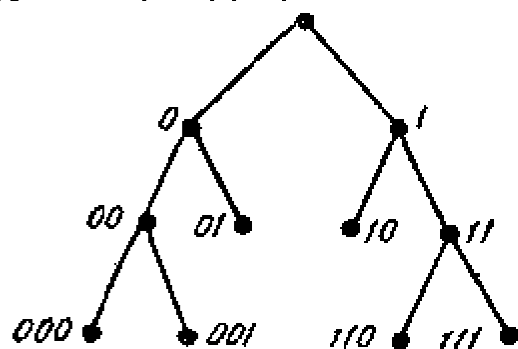


图3—12 典型二元树

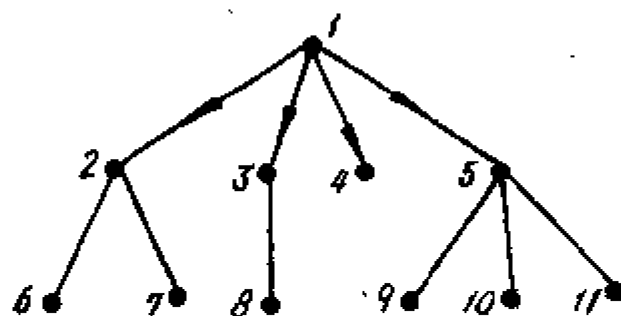


图3—13 有向树

图3—14、3—15的由来分两步。第一步在每一个顶点上只保留最左边的一条弧，并将其它各弧删除，同时在每一阶段从最左边的顶点依次向右，用水平边将其同胞顶点连接得图3—14。而后转入第二步，对任一特定顶点按下列方式选择左右子。左子取该顶点紧下边的

那个顶点，右子为其右侧第一个同胞点，依此得图 3 —15。同样，可以用定位二元树表示任一森林。

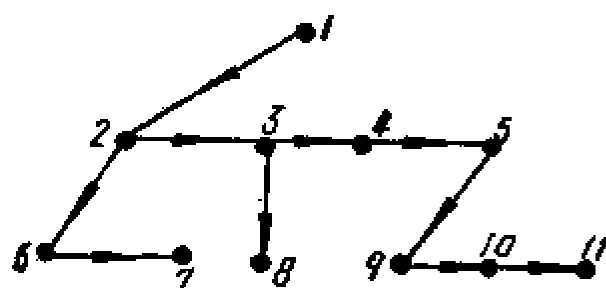


图 3 —14 同胞形式

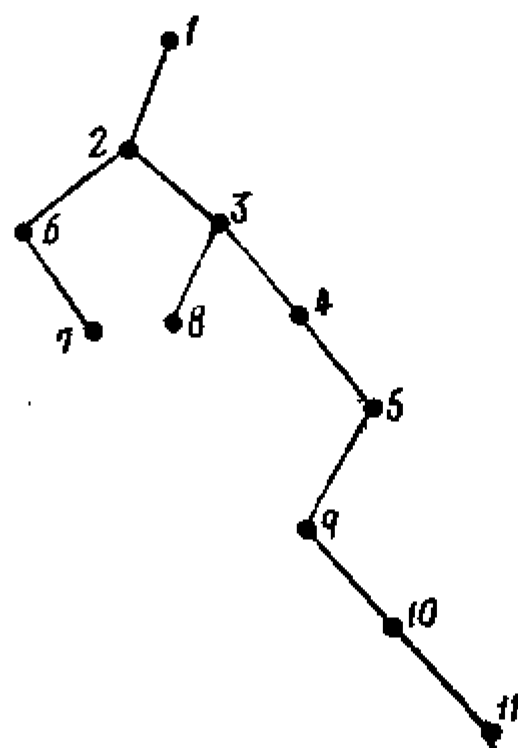


图 3 —15 二元树形式

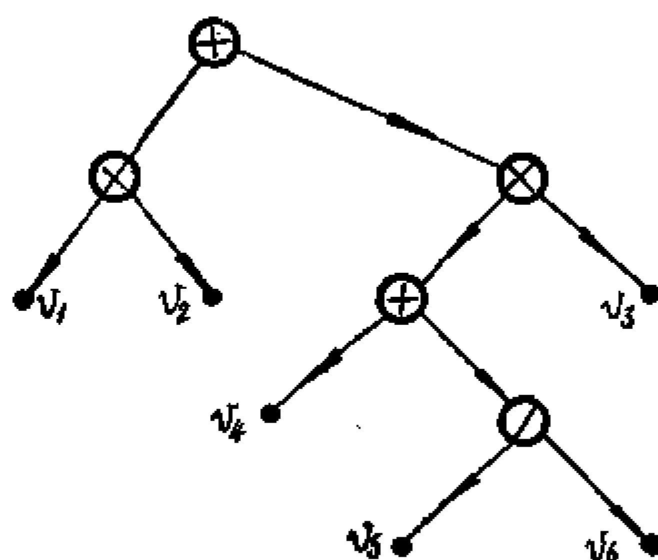


图 3 —16 代数式树

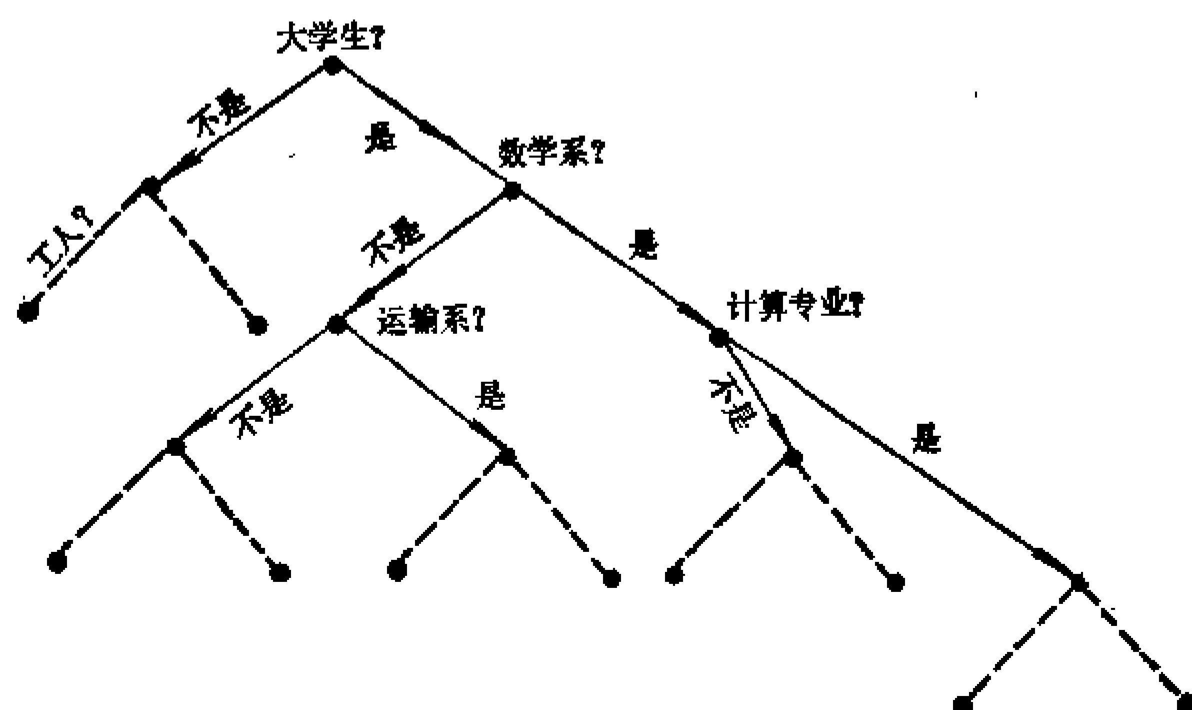


图 3 —17 判决叙列树

三、树的应用实例

例3.4：一个加括号的代数式或者命题逻辑里的合式公式（*well-formed formula*）都可以用树表示。例如代数式 $v_1v_2+(v_4+\frac{v_5}{v_6})v_3$ 可以用图 3 —16表示。其中各终端的顶点表示运算元素，各个圆圈（内部加运算符的）节点表示相应的运算步骤。其中短斜线圈⊘表示除法运算。树所指示的运算次序是左先右后、自下而上。在节点上的运算指示，只有其左右子均已变成数或式子或合式公式时才能进行。显然用树表示算术表达式的技术，在书写机器指令的编译程序时是很有用的。

例3.5：树也可以用来表示判决叙列，见图 3 —17的判决叙列树。这也是一个二元树。

还有分类树，它不是二元的。这些例子显示出电子计算机在社会调查中的应用。

习　题

1. 试作一个图G＝（V,U），并选取适当的顶点集A⊂V，B⊂V，使余圈ω（A）为一回路。使基本余回路$\omega(B)=\omega^+(B)$为一个圈。

2. 试论弧割集与余圈、基本余圈的关系。

3. 利用欧拉公式证明K_5不是平面图。

4. 设ω是图G的边的子集，试证ω为余圈的充分必要条件是它同G的基本圈不可能仅有一个共同边；且对于ω的每一对边e_1，$e_2\in\omega$存在一个基本圈μ使

$$\mu\cap\omega=\{e_1,\ e_2\}$$

5. 试证图G＝(V,U)为一有根树的充分必要条件是存在唯一的一个顶点a，使$d^-_G(a)=0$；而且对任一顶点$v\in V$总有$d^-_G(v)=1$。

6. 试证对树上任何两点有唯一的一条链联结它们。

7. 图论中的树和植物学中的树在什么意义之下是相似的？

8. 试证顶点数大于2的树至少有两个端点（即次数≤1的顶点）。

9. 试证恰有两个端点的树，只能是一条基本链。

10. 有n个顶点、$n-1$个端点的树是什么形状？在同构的意义下有多少种这样子的树？

11. 给出已知顶点集V的最长树的构造方法，并证明之。

12. 将图3—18用一个完全二元树表示出来？

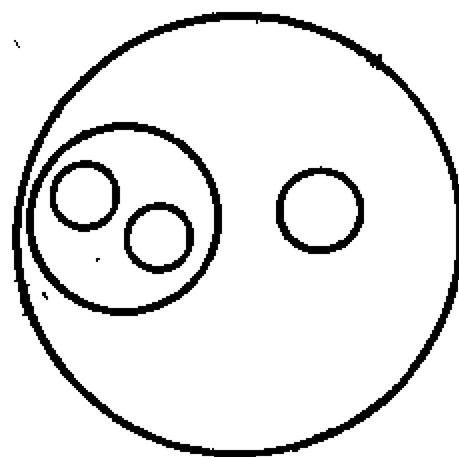


图3—18　Venn图

13. 试证：有n个顶点，m条弧的强连接*1-图的强连接性遭到破坏时，最少需要移去的弧数为$\binom{m}{n}$。

14. 设G是一个n阶无向图，T＝(V,U)为G的延伸子树，试证G的每个边割集中，至少包含树T的一条边。

15. 试证连接图的每一条边至少包含在一个延伸子树中。

16. 一个n阶有向1-图G＝(V,Γ)称为降序的，系指它的顶点可以这样编以序号，使$i>j$时$v_j\bar{\in}\Gamma(v_i)$，试证图G为降序的充分必要条件是它不含回路。

* 关于强连接性的定义请参看定义4.5。

第四章 路径问题

在图的应用中、与交通、信息传输有关的最简单的问题是要判定图上某两点间是否存在有路径；其次是进而找出一条连接两点间的路径；最后一个问题是要找出一条最短的、次短的路径。

作为头一个问题的实例，有这样的问题：如某两地是否由铁路运输线，或陆上交通线联结。也可以举出某电器上两节点间的线路是否完好等等。这里的核心问题是要提供一种数学模型，借以对此类问题进行理论研究。

作为第二类问题的实例，可以举出迷宫问题的解法和查找某电路板上的断裂节点。又如在电话开关网络中，当一个呼唤到来之后只要把线路接通就行。

作为第三类问题的实例是最容易使人理解的。在一般交通运输中，顾客总要求走最短路径，而当它被占用时转而要求走次短路径。因此在一个给定图上研究寻找第 k 短路径的方法就是十分必要的了。

在本章之末我们还将提到与路径有关的概念。

第一节 道 路 图

一、道路图及有关概念

我们在定义2.29中定义了一个图 $G=(V,U)$ 的逻辑积：

$$G^{(2)}=G\wedge G=(V,U^{(2)})$$

其中 v_i，$v_j\in V$ 时，$(v_i,v_j)\in U^{(2)}$ 的充分必要条件是在G中存在一条长度恰好等于2的路 P_{v_i,v_j}，并由递归方法定义了

$$G^{(r)}=\underbrace{G\wedge G\wedge\cdots\wedge G}_{r\text{个}}=(V,U^{(r)})$$

$(v_i,v_j)\in U^{(r)}$ 的充分必要条件是在G中存在一条从 v_i 到 v_j 的长恰为 r 的路。

在定义2.30中定义了两个图 $G_1=(V_1,U_1)$ 及 $G_2=(V_2,U_2)$ 的逻辑和：

$$G_1\vee G_2=(V,U_1\vee U_2)$$

其中 $U_1\vee U_2$ 表示集合论意义下的并集。在定义2.31中对 n 阶图G定义了它的道路图

$$G^P=G\vee G^{(2)}\vee\cdots\vee G^{(n)}$$

并且记为 $G^P=(V,U^P)$。为了对道路图进行细致而深入的讨论，我们引入以下概念。

定义4.1：设 v 为有向1-图 $G=(V,\Gamma)$ 的一个顶点，若存在一条由G的顶点 v' 到 v 的路 $P_{v',v}$，则称顶点 v 是由 v' **可达的**。

注意可达性概念与顶点 v 及 v' 间的路 $P_{v',v}$ 的长度无关*，也与这种路的数目无关，关

* 这里以及后继部分，对于没有（表示边的长度）权的图，在谈到路或链等的长度时，总是指路或链上边的数目。

键是只要存在这样的路$P_{v'u}$。为了逻辑上的完备性我们总设每一顶点由其本身可达。

定义4.2：若顶点v可由v'到达，称从顶点v'到v的最短路径为一条**测地线**。从v'到v的测池线之长称为从v'到v的距离记为$d(v',v)$，它有以下三性质：

$d(u,v)\geqslant 0$；　　　　(叫非负性)

$d(u,u)=0$；　　　　(叫反身性)

$d(u,v)+d(v,w)\geqslant d(u,w)$。　　　　(叫三角形不等式)

若由顶点u不能达v，则记$d(u,v)=\infty$。

我们援引以前的方法，可以把顶点间的可达性概念加以拓延。

定义4.3：由顶点v可以达到的顶点集合叫作v的**可达集**，记为$R(v)$。设S为顶点集V的子集，凡可由S中顶点达到的顶点集，叫作S的可达集记为$R(S)$。

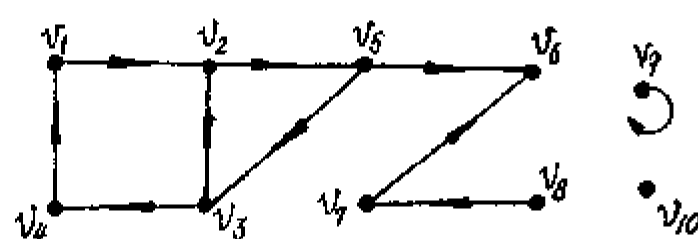


图4—1　可达集

对于图4—1有下列结果

$$R(v_1)=R(v_2)=R(v_3)=R(v_4)=R(v_5)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\};$$

$$R(v_6)=\{v_6\};\ R(v_7)=\{v_6,v_7\};\ R(v_8)=\{v_6,v_7,v_8\};$$

$$R(v_9)=\{v_9\};\ R(v_{10})=\{v_{10}\};\ R(v_5,v_8,v_9,v_{10})=V=R(v_1,v_8,v_9,v_{10})。$$

定义4.4：在图$G=(V,U)$中，子集$X\subset V$若满足下列二条件则称为**顶点基**。

（1）$R(X)=V$；

（2）X的任一真子集不具性质（1）。

在图4—1中集合$\{v_1,v_8,v_9,v_{10}\}$及$\{v_5,v_8,v_9,v_{10}\}$均为顶点基。

性质4.1：顶点基S_1有下列性质：

（1）若v为孤立点则$v\in S_1$；

（2）图的起点集S_G必在S_1中：$S_G\subset S_1$；

（3）对于S_1中的任意两个顶点u及v恒有$u\overline{\in}R(v)$；

（4）若$v\in V,d_{\bar{G}}(v)>0$，且v不在回路上，则$v\overline{\in}S_1$；

（5）若G为一个无回路图，则$S_G=S_1$；

（6）若S_2为G的另一顶点基，则$|S_1|=|S_2|$。

证明：性质（1）～（5）作为练习，我们只证（6）。因为在图4—2（a）中倘若存在路P_{v,u_1}，且存在$u_2\in S_1$，使$u_1\neq u_2$，而且存在路$P_{u_2,v}$，则必有路P_{u_2,u_1}此与S_1为顶点基矛盾。故图4—2（a）不可能出现，只能是图（b）。因此对任一$v\in S_2$必有唯一的$u_1\in S_1$与之对应，反之亦然，故$|S_1|=|S_2|$。

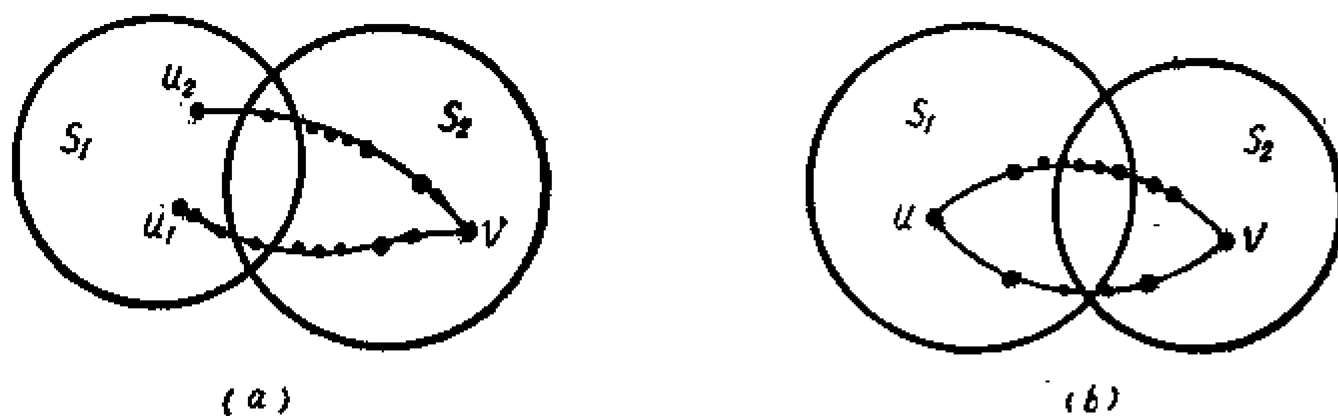


图4—2　顶点基间的对立

定义4.5：图$G=(V,U)$的任二顶点u与v之间若都是互相可达的，则称此图为**强连接**的。为了区别，称定义2.17中所定义的连接性为**弱连接**。若对图G中的任二顶点u及v总有一条路$P_{u,v}$或$P_{v,u}$时，则称此图为**单向连接**的。据此仿照定义2.17，可以定义相应的**连接分支**。

显然一个单向连接的有向图也是弱连接的，反之不必然。一个强连接图既是弱连接的又是单向连接的。

二、道路矩阵

设图$G=(V,U)$的结合矩阵为A。为了依次确定G的逻辑积$G^{(r)}$的结合矩阵$A^{(r)}$，我们首先引入二元逻辑运算。定义：

$$a\vee b=\max\{a,b\};$$
$$a\wedge b=\min\{a,b\}。$$

并称$a\vee b$和$a\wedge b$分别为a，b的（逻辑）和与积（注：这里所用符号"$\vee$"和"$\wedge$"本来是逻辑运算中的合取和析取，而且a和b只取0和1两个值。为便于不熟悉逻辑的同志，我们在这里给了这种定义）。按图$G^{(2)}$的定义，它的结合矩阵$A^{(2)}=[a_{ij}^{(2)}]$的一般元为

$$a_{ij}^{(2)}=\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge a_{kj})$$

其中$\bigvee\limits_{k=1}^{n}$表示依逻辑和的意义将$a_{ik}\wedge a_{kj}$，对k从1加到n。

注意：

（1）若有一个k：$1\leqslant k\leqslant n$使$a_{ik}\wedge a_{kj}=1$。

则此式等价于　　　　$a_{ik}=1=a_{kj}$

这后一式之意义在于有一个顶点v_k使$(v_i,v_k)\in U$，$(v_k,v_j)\in U$。即等价于在图G上从顶点v_i到v_j有一条长度恰为2的路。

（2）由定义可知"若有一个k：$1\leqslant k\leqslant n$使$a_{ik}\wedge a_{kj}=1$"，又等价于表达式

$$a_{ij}^{(2)}=\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ij}\wedge a_{jk})=1$$

故由（1）可知$a_{ij}^{(2)}=1$表示在图G上从顶点v_i到v_j恰有一条长为2的路。

（3）若对一切$k=1,2,\cdots,n$恒有$a_{ik}\wedge a_{kj}=0$，则由定义$a_{ij}^{(2)}=0$。故$a_{ij}^{(2)}=0$的意义表示G上没有从顶点v_i到v_j的长为2的路。总结以上各点可知图$G^{(2)}$的结合矩阵为$A^{(2)}$。

（4）依此递推可知图$G^{(r)}$的结合矩阵为$A^{(r)}$。

（5）道路图的结合矩阵$A^p=[p_{ij}]$为

$$p_{ij}=a_{ij}\vee a_{ij}^{(2)}\vee\cdots\vee a_{ij}^{(n)}$$

或表示为
$$A^p=A\vee A^{(2)}\vee\cdots\vee A^{(n)}$$

首先要注意的是n阶图$G=(V,U)$里最长的路为n。故道路图$G^p=G\vee G^{(2)}\vee\cdots\vee G^{(n)}$的意义，表示图G里顶点$v_i$与$v_j$之间是否有路，即$v_j$是否由$v_i$可达。若是$v_j\in R(v_i)$，则$G^p$中有弧$(v_i,v_j)\in U^p$；否则$(v_i,v_j)\overline{\in}U^p$。

其次考虑A^p中的一般元p_{ij}。若是$p_{ij}=1$，则必有k：$1\leqslant k\leqslant n$，使$a_{ij}^{(k)}=1$，这

表示在图G里$v_j \in R(v_i)$，即$(v_i, v_j) \in U^p$。反之，设若$(v_i, v_j) \in U^p$，则必有k：$1 \leqslant k \leqslant n$，使$a_{ij}^{(k)} = 1$，从而更有$p_{ij} = 1$。于是$p_{ij} = 0$或1，表示$(v_i, v_j)$是否属于$U^p$，或关系式$v_j \in R(v_i)$在图G里是否实现。从而得证$A^p$为道路图$G^p$的结合矩阵。

道路矩阵是表示图的顶点之间可达性的有效工具，这种矩阵可以在电子计算机上给出一个简短的程序。

三、道路矩阵在确定强连接分支上的应用

设A^p为图G的道路矩阵，当$(A^p)'$为A^p的转置矩阵，$(A^p)' = [b_{ij}]$时，$b_{ij} = p_{ji}$，则矩阵A^p与$(A^p)'$的逐元乘积矩阵为

$$A^p \times (A^p)' = [p_{ij} \wedge p_{ji}]$$

的第i行第j列的元

$$p_{ij} \wedge p_{ji} = 1$$

表示图G里顶点v_i与v_j之间互相可达。于是$A^p \times (A^p)'$的第i行显示了顶点v_i所在的连接分支上的全部顶点。同样可确定弱连接或单向连接分支。

第二节　路径方法

关于路径问题的实际意义，已在前面有所阐述。在这里还可以指出另外一类问题，即理论的逻辑推理过程。在论证命题A蕴涵命题B时，只要我们能切实遵循演绎规则，正确地使用公理、定义及定理，由命题A出发导出命题B，那么就算得到了证明，而不管中间经过那些步骤。这显然是一个找路径的问题。至于这个推理过程（即证明）能否进一步提练使之更简短些，这就是求最短路的问题。

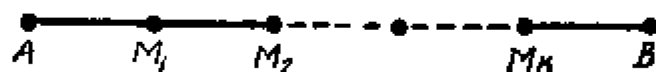


图4—3　推理图

路径方法　开始仅需要用一个标号来处理各顶点，称此标号为$LABEL$。令$LABEL(I)$为顶点v_i的先行元的编号，在每一标号步骤上，我们无需寻找与始点具有最短总长的未标号顶点，而是从一个已标号顶点出发，将其所有未标号的后继元给以标号。所以在每一步上可以有多个顶点被标号。

当我们从某一顶点开始标号时，它的每一个尚未标号的后继元都将获得标号。故当从一个顶点出发标过号之后，就再也不要从它去给别的点标号了。当我们从一个顶点出发给其后继元标过号之后，则称此顶点为**"已扫描"**。我们每次都是从一个已标号但尚未扫描过的顶点去标号。为了找已标号、尚未扫描过的顶点，在我们的方法中必须保留充分的信息。一种方法就是要保留反映各点状态的目录：未标号也未扫描过；标了号而未扫描过或已标号且已扫描过。然后我们就可以在状态目录上找第二类状态。下面我们给出用堆的概念找第二类点的方法。

一个堆就是一个项目录，称为$STACK(I)$，我们用某种方法来使用它。除此之外，还需要一个简单整数变元称它为$POINT$，它的作用在于告诉我们在堆中有多少项目。我们可以把一个堆具体化为一个竖直排列的项目录。图4—4表示一个有四个项目的堆，并把$POINT$一词的意义也表示出来了。

当一个顶点v_j获得标号之后，马上用增加$POINT$之值的办法，把v_j放在堆里，并将J

存储在新位置：

$POINT=POINT+1$

$STACK(POINT)=J$

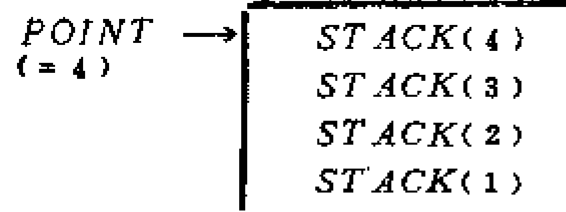


图4－4　堆及其指针

同理，当我们需要从一个新的顶点 v_i 去扫描时，我们就把它从堆中取回，并将 $POINT$ 减1：

$$I=STACK(POINT)$$

$$POINT=POINT-1$$

下面我们给出任意路方法的一个完备的 *FORTRAN* 程序，首先说明如下：

由于我们并不关心路径之长，仅仅需要相邻与否的信息，所以我们先从起点K开始标号，并给顶点K标上－1，此时堆中仅有K。主要循环是从检验 *POINT* 是否为0开始。若 *POINT* 为0，则表明我们对每一个已标号顶点已经扫描过，但并未达目标点L，所以就没有从顶点K到L的路径。然后跳到说明99，在这步打印出一个适当的信息后停止。若是 *POINT* 大于0，我们就从堆中取出一个已标号但未扫描的顶点，从它上进行扫描，即对它的未标号的相邻顶点进行标号，把新标的顶点放在堆上。扫描完一个顶点之后，我们就要检查 *LABL*(L)，若顶点L尚未标号就返回到主循环的开头，即说明6。若L达到之后，我们就退回来，依反序打印出路上的顶点。

求路径的 *FORTRAN* 程序

```
C……此程序找K与L二顶点间的路径。
      INTEGER NUMBER(50),NEAR(50,50),LABEL(50),STACK(50),
      POINT
C……输入并打印N, K, L和邻接目录
     READ(5,1)N, K, L
1    FORMAT(50I2)
     WRITE(6,2)N, K, L
2    FORMAT('1N=',I3,'K=',I3,'L=1',I3)
     DO 4 I=1,N
     READ(5,1)M,[NEAR(I,J),J=1,M]
     WRITE(6,3)I,[NEAR(I,J),J=1,M]
3    FORMAT['NODE',I3,'CONNECTED TO',25(I3)]
4    NUMBER(I)=M
C……原始堆和标号
     DO 5 I=1,N
     STACK(I)=0
5    LABEL(I)=0
C……置K于堆并将其标号
     STACK(I)=K
     POINT=1
     LABEL(K)=-1
C……主循环开始
C……堆是否为空的？若是，就打印信息
```

```
6   IF(POINT.EQ.O)GOTO99
C……从堆中取一个已标号、未扫描过的顶点 I
    I =STACK(POINT)
    POINT=POINT-1
C……扫描 I
    M=NUMBER(I)
    DO 7 J=1,M
    JI=NUMBER(I,J)
    IF[LABEL(JI).NE.O]GOTO7
C……JI为与顶点 I 相邻而未标号的顶点，将其标号并将它放在堆上。
    LABEL(JI)= I
    POINT=POINT+ 1
    STACK(POINT)=JI
7   CONTINUE
C……看是否完了? 若未完，则返回到主循环之初。
    IF[LABEL(L).EQ.O]GOTO6
C……返回
    LAST=L
8   LAST=LABEL(LAST)
    WRITE(6,9)LAST
9   FORMAT('NODE',I2)
    IF(LAST.EQ.K)STOP
    GOTO8
99  WRITE(6,10)
10  FORMAT('NODES ARE NOT CONNECTED')
    STOP
    END
```

我们把这个程序运用于航线图 4－5，那末它的输出是：

```
  N= 8    K= 1     L= 3
  NODE   1   CONNECTED TO   2  7  8 (注：堆顶为 8)
  NODE   2   CONNECTED TO   1  5  3
  NODE   3   CONNECTED TO   2  5  4
  NODE   4   CONNECTED TO   3  5  6  7  8
  NODE   5   CONNECTED TO   2  7  6  4  3
  NODE   6   CONNECTED TO   5  7  4
  NODE   7   CONNECTED TO   1  5  6  4  8
  NODE   8   CONNECTED TO   1  7  4
  NODE   2
  NODE   1
```

图中顶点表示各机场，边表示航线，线旁用圆圈起来的数字表示机场间的时程。

上列程序给出的是从K＝1到L＝3的一条路径：（3，4），（4，8）和（8，1）。

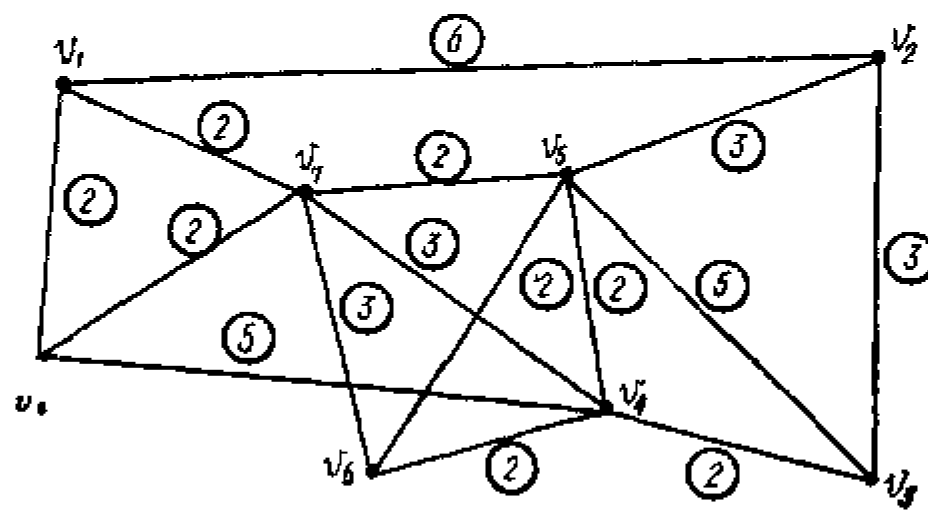


图4—5　航线图

第三节　最短路径方法

我们在第一节里讨论了各顶点之间路径的存在性问题，但在解决这个问题的过程中未能保留路径的轨道。在第二节里我们给出了寻找路径的具体方法。在这一节里我们将进而解决两顶点之间的最短路径的求法，这种求法与最短树方法有原则区别。设已给一个图G＝(V，U)，在各弧上均给定了一个表示两端点间距离的权 $l(v_i, v_j)$ 或简记为 l_{ij}，〔它也可以是使用弧(v_i, v_j)的其它代价，例如时间、费用等等〕。最短路径方法是在图论中使用电子计算机解决的第一个问题。我们将给出它的*Fortran*程序。关于各弧长度的信息，我们用二维数组*DIST*(I，J)来存储，它的第(I，J)位置上为(v_i, v_j)弧的长度。在这里我们限定*DIST*(I，J)为整型数组，并设*DIST*(I，J)＝*DIST*(J，I)，且各弧的长度非负。关于图本身的存储方式仍如前。其中没有的弧以短横线或足够大的数填充均可。作为一个例子，图4—5的各边长度（对无向图可把每一条边如前所述理解为两条弧）均表示在圈内的数字里，具体地可以认为是各机场间飞行的时间，此图的距离数组为

I | J＝	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	6	-	-	-	-	2	2
2	6	-	3	-	3	-	-	-
3	-	3	-	2	5	-	-	-
4	-	-	2	-	2	2	3	5
5	-	3	5	2	-	2	2	-
6	-	-	-	2	2	-	3	-
7	2	-	-	3	2	3	-	2
8	2	-	-	5	-	-	2	-

当然也可以用其它方法存储。

一、标号法

这是解决最短路径的方法，这种方法依作者的习惯而有所不同，这里所介绍的一种方法，从效果上讲是较快的。所谓标号就是在每一步骤上给某些点以数字记号，这些数字蕴含

着找最短路径的信息。标号含两个部分，即$LAB1[I]$和$LAB2[I]$。前者表示顶点v_i的先行元（即从它来到v_i的那个顶点）的编号；后者表示从起点S到顶点v_i的总路程。

例如从起点S沿一切可能的弧派遣使者，均以相同的匀速前进，看谁首先到达一个新的顶点，当一使者到达第一个新顶点v_i时，则给此顶点v_i以如下的标号：$LAB1[I]=S$这表[illegible]

二、程序

上列方法非常适于电子计算机，我们将给出它的程序并略加说明。此程序是由输入足够的图论描写所需的信息及距离矩阵开始，在此应用邻接目录方法，其外半次数组为 *NUMBER*(I)，邻接目录为 *NEAR*[I,J]，*DIST*(I,J)矩阵的元素用资料卡输入，而在无须关心的元处画一杠，并作为0输入。第一行卡片为顶点数N和起点v_s与终点v_t。当信息输入之后，需将它们打印出来以便鉴定输入资料之正确性。对于上述航线的例子，它的输入资料卡为：

```
080103                          N,S,T
03020708         ⎫
03010503         ⎪
03020504         ⎪
050305060708     ⎪
050207060403     ⎬ NUMBER(I)和NEAR(I,J)
03050704         ⎪
050105060408     ⎪
03010704         ⎭
  06          0202   ⎫
06  03  03           ⎪
  03  0205           ⎪
    02  02  020305   ⎬  DIST(I,J)
  030502    0202     ⎪
      0202    03     ⎪
02    0302  03  02   ⎪
02    05      02     ⎭
```

以下给出在图上v_s及v_t二顶点间最短路径方法的*Fortran*程序。

```
C……此程序为寻找v_s至v_t间的最短路径
    INTEGER NUMBER(50),NEAR(50,50), DIST (50,50), LAB1(50),
    LAB 2(50)
C……输入并打印N,S,T邻接目录和距离矩阵
    READ(5,1)N,S,T
1   FORMAT(50I2)
    WRITE(6,10)N,S,T
10  FORMAT('1N=',I3,S=',I3,'T=',I3)
    DO  2  I=1,N
    READ(5,1)M,[NEAR(I,J),J=1,M]
    WRITE(6,11)I,[NEAR(I,J),J=1,M]
11  FORMAT['NODE',I3,'CONNECTED  TO',25(I3)]
2   NUMBER(I)=M
```

```
      DO 3 I=1,N
      READ(5,1)[DIST(I,J),J=1,N]
 3    WRITE(6,12)[DIST(I,J),J=1,N]
 12   FORMAT['',25(I3)]
C……首次标号
      DO 4, I=1,N
      LAB1(I)=0
 4    LAB2(I)=0
      LAB1(S)=-1
 7    LSTAR=100000
      DO 5, I=1,N
      IF[LAB1(I).EQ.O]GOTO5
C……vᵢ为一个已标号的顶点
      M=NUMBER(I)
      IF(M.EQ.O)GOTO5
      DO 6,J=1,M
      JI=NEAR(I,J)
      IF[LAB1(JI).NE.O]GOTO6
C……JI为顶点vᵢ的一个未标号的后继元
      IF[LAB2(I)+DIST(I,JI).GE.LSTAR]GOTO6
C……找最短总长度
      LSTAR=LAB2(I)+DIST(I,JI)
      ISTAR=I
      JSTAR=JI
 6    CONTINUE
 5    CONTINUE
C……标记JSTAR
      LAB1(JSTAR)=ISTAR
      LAB2(JSTAR)=LSTAR
C……之后查看
      IF[LAB1(T).EQ.O]GOTO7
C……结尾
      LAST=T
 9    LAST=LAB1(LAST)
      WRITE(6,8)LAST
 8    FORMAT('NODO',I2)
      IF(LAST.EQ.S)STOP
      GOTO9
      END
```

其中DO 4循环，令所有标号为0，而后令顶点v_s的第一个标号$LAB1$为-1。说明7为

此标号法的主要部分，它有两个环节，一是找出每个已标号顶点的尚未标号的后继元，二是求出它们到始点v_s的总长度。变元$LSTAR$表示新的最短总距离，$ISTAR$表示新标号$LAB1$，而$JSTAR$表示新标上号的那个顶点。$DO5$循环确定新的最短总距离，在说明5中保留了赋予$LSTAR$、$ISTAR$和$JSTAR$的值。顶点$JSTAR$获得了相应的标号，并要检查目标顶点v_t的第一个标号$LAB1$，如果v_t的$LAB1$为0就说明我们尚未达到v_t，于是转回到说明7从新开始标号阶段。

当目标顶点v_t达到之后，则返回来确定最短路径，沿原来的反序打印出路上各顶点。对于航线图4—5应用这里的程序之后，它的输出为

```
N=8      S=1  T=3
NODE     1  CONNECTED  TO  2  7  8
NODE     2  CONNECTED  TO  1  5  3
NODE     3  CONNECTED  TO  2  5  4
NODE     4  CONNECTED  TO  3  5  6  7  8
NODE     5  CONNECTED  TO  2  7  6  4  3
NODE     6  CONNECTED  TO  5  7  4
NODE     7  CONNECTED  TO  1  5  6  4  8
NODE     8  CONNECTED  TO  1  7  4
         0  6  0  0  0  0  2  2
         6  0  3  0  3  0  0  0
         0  3  0  2  5  0  0  0
         0  0  2  0  2  2  3  5
         0  3  5  2  0  2  2  0
         0  0  0  2  2  0  3  0
         2  0  0  3  2  3  0  2
         2  0  0  5  0  0  2  0

NODE 4
NODE 7
NODE 1
```

三、关于效果的说明

这里介绍的方法与其它方法比较起来极为有效。在每一标号步骤从已标号顶点仅需计算N个以下的距离，而已标号点的个数也是小于N的，且标号过程最多进行$N-1$次，故总共仅需进行少于N^3次加法。当$N=30$时，$N^3=27000$，若百万分之一秒能进行一次加法运算，则仅需0.027秒就可以找到最短路径。

倘若对于30个顶点的完备图，用历数的办法来求最短路径，即便用电子计算机也是难以完成的。因为两点间的路径多于$(N-2)!$条，当$N=30$时，路径数多于$28!=3\times10^{29}$，按上列速度至少要用10^{16}年才能完成！

第四节　第N短路径与最可靠路径

当最短路径被占用或出现故障时，就必须改用次短、再次短甚至第N短路径。另外当图上各弧以概率提供使用时，则常要求选择最可靠的路径。理想的是要选择既短又可靠的路径，然而要求两者同时兼得是不合理的，因为一般来说显然是不可能的。实际可行的办法是在一种要求的特定范围里寻找另一种要求的最优解，倘若能有更多的资料使我们能够按路程及可靠性定出最优解的目标函数，那也可以找到综合（两个变元的）最优解的。

一、第N短路径方法

设$\Phi_N(s,t)$为从顶点v_s到v_t的第N短路径的集合，在不至混淆的条件下简记为Φ_N，即Φ_1为从v_s到v_t的最短路集合；Φ_2为次短路集合等等。令$l(\Phi_N)$为Φ_N中路径的共同长度，作为一个实例，假设在一个图中有10条s-t路：Λ_i，$(i=1,2,\cdots,10)$，它们的长度不超过8，如下列表4—1所示。并将集合Φ_N表示在表4—2中。

表4—1

i	$l(\Lambda_i)$
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	5
7	6
8	6
9	7
10	8

表4—2

N	Φ_N
1	$\{\Lambda_1\}$
2	$\{\Lambda_2\}$
3	$\{\Lambda_3\}$
4	$\{\Lambda_4\}$
5	$\{\Lambda_5,\Lambda_6\}$
6	$\{\Lambda_7,\Lambda_8\}$
7	$\{\Lambda_9\}$
8	$\{\Lambda_{10}\}$

定义4.6： 一条由顶点$v_s,v_1,v_2,\cdots,v_k,v_{k+1}\cdots,v_t$组成的$s$-$t$路$\Lambda_2$，若满足以下三个条件，则称为$s$-$t$路$\Lambda_1$从顶点$v_{k+1}$到$v_k$的一条**偏移**，记为$\Lambda_2=\text{dev}(\Lambda_1)$或$\Lambda_2=\text{dev}(\Lambda_1;k)$：

d_1：$v_s\cdots v_k$为一条最短s-k路；

d_2：$(v_k,v_{k+1})\in U$但不在Λ_1里；

d_3：路$v_{k+1}\cdots v_t$是Λ_1的一个部分，作为特例允许$k+1=t$。

弧(v_k,v_{k+1})叫作Λ_1的**偏移弧**，须知在上列定义中$v_s,v_1,\cdots,v_{k-1}$诸顶点可以在也可以不在Λ_1中。

定理4.1： 若Λ_2不是一条最短的s-t路，则必有一条s-t路Λ_1使$\Lambda_2=\text{dev}(\Lambda_1)$且$l(\Lambda_1)<l(\Lambda_2)$。

证明：由题设在Λ_2中必有顶点v_{k+1}使

a）$v_s,\cdots,v_k,v_{k+1}$均在Λ_2中；

b）$v_s,\cdots,v_k$为一条最短的s-k路；

c）$v_s,\cdots,v_k,v_{k+1}$不是一条最短的$s-(k+1)$路。

令Λ_3为一条最短的$s-(k+1)$路，Λ_4为由$v_s,\cdots,v_k,v_{k+1}$构成的$s-(k+1)$路，Λ_5为由$v_{k+1},\cdots,v_t$构成的$(k+1)-t$路，于是有

$$\Lambda_2 = \Lambda_4 \cup \Lambda_5$$

$$l(\Lambda_2) = l(\Lambda_4) + l(\Lambda_5) > l(\Lambda_3) + l(\Lambda_5) = l(\Lambda_1)$$

其中$\Lambda_1 = \Lambda_3 \cup \Lambda_5$，且$\Lambda_2 = \text{dev}(\Lambda_1)$，故定理得证。

利用上列定理可以逐一构造出Φ_N。

第N短路径方法如下。

第一步：援用最短路径方法，为一切顶点v_j找出所有的最短$s-j$路径的集合$\Phi_1(s,j)$，特别标出$\Phi_1(s,t) = \Phi_1$。在每一顶点上标出标号$LAB1$和$LAB2$，为简单计，设顶点v_i上的标号分别为$\varepsilon(i) = LAB1[I]$和$\delta(i) = LAB2[I]$，令N＝２。

第二步：重复使用下列步骤确定出Φ_N中所有的路$\{\Lambda_{N_j}\}$：$l(\Lambda_{N_j}) = \min\{l[\text{dev}(\Lambda_r;k)]$：$\Lambda_r \in \Phi_h, h < N; l[\text{dev}(\Lambda_r;k)] > l(\Phi_{N-1})\}$，此处min是对一切$\Lambda_r \in \Phi_h$、一切$h < N$和一切可能的$k$取的。

第三步：若一切s-t路的偏移均已找出则停止，否则以N＋１代N返回到第二步。

作为一个实例，考虑下图４—８里由顶点v_s到v_t的各种长度的路径。图里圈中数字仍表示路段长度，各顶点上的数字为$LAB2$之值。最短的s-t路只有一条：$\Phi_1 = \{\pi_1\}$，我们把这些路分别列在表４—３里。这里我们用π表示基本路，用Λ表示非基本路。π_1的偏移有７条$\pi_2 \sim \Lambda_8$，这些偏移中最短的构成Φ_2，在Φ_2中的路仅有五条偏离路。Φ_3只有π_7一条路，π_7仅有一条新的偏移路Λ_{13}。Φ_4中有三条路。对于N＞４的N，尚可逐一定出Φ_N。今不多述。

表４—３

$\pi_1 = v_s, v_2, v_6, v_t$	$l(\pi_1) = 6$
$\Phi_1 = \{\pi_1\}$	$l(\Phi_1) = 6$
$\pi_2 = \text{dev}(\pi_1) = v_s, v_2, v_3, v_6, v_7, v_t$	$l(\pi_2) = 8$
$\pi_3 = \text{dev}(\pi_1) = v_s, v_3, v_6, v_7, v_t$	$l(\pi_3) = 8$
$\pi_4 = \text{dev}(\pi_1) = v_s, v_4, v_7, v_t$	$l(\pi_4) = 8$
$\pi_5 = \text{dev}(\pi_1) = v_s, v_4, v_5, v_6, v_t$	$l(\pi_5) = 8$
$\pi_6 = \text{dev}(\pi_1) = v_s, v_4, v_5, v_{10}, v_8, v_t$	$l(\pi_6) = 10$
$\pi_7 = \text{dev}(\pi_1) = v_s, v_4, v_2, v_6, v_t$	$l(\pi_7) = 9$
$\Lambda_8 = \text{dev}(\pi_1) = v_s, v_6, v_2, v_3, v_6, v_t$	$l(\Lambda_8) = 10$
$\Phi_2 = \{\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}$	$l(\Phi_2) = 8$
$\pi_9 = \text{dev}(\pi_2) = v_s, v_3, v_2, v_7, v_t$	$l(\pi_9) = 10$
$\pi_{10} = \text{dev}(\pi_2) = v_s, v_4, v_5, v_2, v_3, v_6, v_7, v_t$	$l(\pi_{10}) = 11$
$\Lambda_{11} = \text{dev}(\pi_2) = v_s, v_3, v_2, v_3, v_3, v_6, v_7, v_t$	$l(\Lambda_{11}) = 12$
$\pi_{12} = \text{dev}(\pi_3) = v_s, v_4, v_5, v_6, v_7, v_t$	$l(\pi_{12}) = 11$
$\Lambda_{13} = \text{dev}(\pi_3) = v_s, v_3, v_2, v_3, v_4, v_7, v_t$	$l(\Lambda_{13}) = 12$
$\Phi_3 = \{\pi_7\}$	$l(\Phi_3) = 9$
$\Lambda_{14} = \text{dev}(\pi_7) = v_s, v_4, v_5, v_2, v_6, v_8, v_t$	$l(\Lambda_{14}) = 13$
$\Phi_4 = \{\pi_6, \pi_8, \pi_9\}$	$l(\Phi_4) = 10$

在确定一条路π的偏移时，宜由终点返向依次沿各射入弧（除π中的一条弧之外）来确定偏移发生的一切可能值。

二、最可靠路方法

最短路方法的结论很容易推广到最可靠路径上去。考虑一个(n,m)图，设各弧u_h上具

非正的下界，称为境界信度，而后去找可靠性不小于此下界的、具有尽可能大的容量的路径。我们在此所要介绍的方法奠基于G的主子图。为给出主子图的确切定义，设π_0是具有最

有可靠度p_k：$0 \leqslant p_k \leqslant 1$。可靠度$p_k$可以是通道$u_k$正常运转的概率，也可以是此通道空闲的概率，或者是某种东西正在使用此通道的概率。假设我们的目的是在某种条件下以最大的可靠度在二顶点间发送货物流。最简单的提法是完全不考虑其它条件，单纯确定最可靠的$s-t$路。

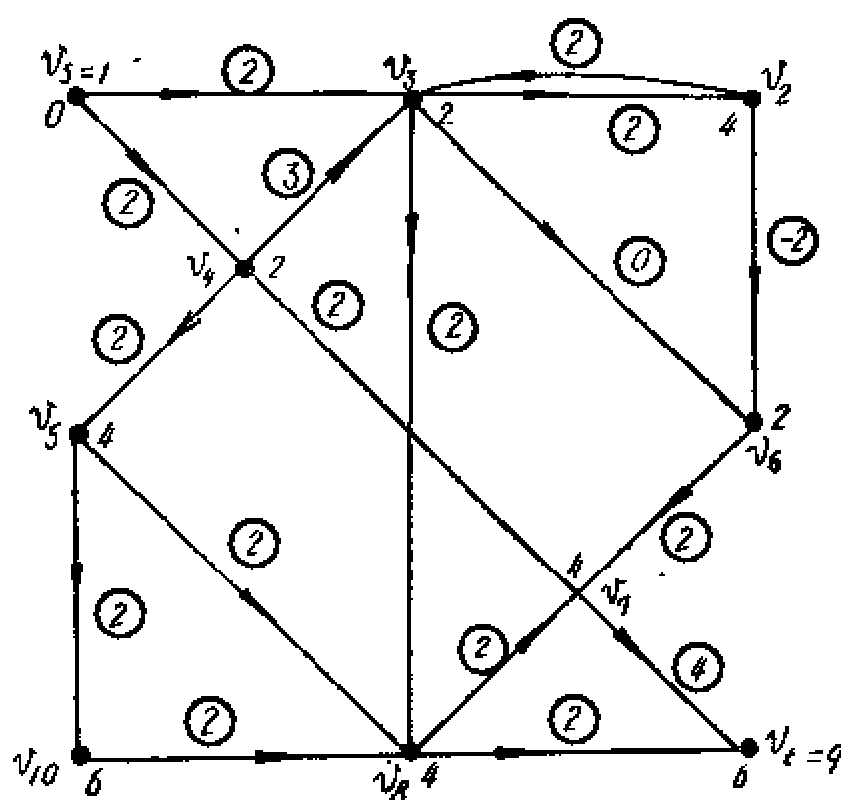


图4—8　第N短路径*

定义4.7：设$\{\pi_1, \pi_2 \cdots, \pi_l\}$是从顶点$v_s$到$v_t$的有向路的集合，定义路径$\pi_k$的**可靠度**$P_K$为此路上各弧的可靠度之积：

$$P_K = \prod_{u_i \in \pi_k} p$$

从概率论的观点看来，这里假设各弧是否可以提供使用与其它各弧的状态是无关的，更确切地说是互为独立的。我们的目的是确定一个满足以下条件的路径集合$L = \{\pi_k\}$：

对一切$\pi_k \in L$，恒有

$$P_K = \max\{P_i;\ i = 1, 2, \cdots, l\}。$$

在此(n, m)图上今以

$$q_i = -\ln p_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

取代弧u_i的权p_i。并视$q_i \geqslant 0$为弧u_i的长度。于是路π_k之长为

$$l(\pi_k) = \sum_{u_i \in \pi_k} q_i$$

定理4.2：各弧分别以概率$p_1, p_2, \cdots, p_m$可供使用时，图$G = (V, U)$里的最可靠的$s-t$路，必为将权p_i换为$q_i = -\ln p_i$的同一图G的最短路径，反之亦然。

证明：因为

$$\ln P_K = \ln\left(\prod_{u_i \in \pi_k} p_i\right) = \sum_{u_i \in \pi_k} \ln p_i \tag{1}$$

故

$$l(\pi_k) = -\ln P_K \tag{2}$$

因对数函数为严格单调递增，且$\ln 1 = 0$的性质可知

$$P_j = \max_i \{P_i\} \tag{3}$$

等价于

$$\ln P_j = \max_i \{\ln P_i\} \tag{4}$$

等价于

$$-\ln P_j = \min_i \{-\ln P_i\} \tag{5}$$

代(2)入(5)得(3)等价于

$$l(\pi_j) = \min\{l(\pi_i)\} \tag{6}$$

定理得证。

* 注：最短路径方法也适用于弧的长度为负的场合，但需加"任一回路之长不为负"的条件。

三、综合考虑的路径选择方法

假设在图G＝（V,U）里的各弧上均有两个权：弧的长度$l(u_k)$和可靠度p_k。一般说来，最可靠的$s-t$路不与最短的$s-t$路相合，依照具体情况可以有三种考虑。第一种情况是以路径的长度为主要依据兼顾可靠性，这时问题的提法是：求路径总长不得超过L的最可靠路径。这里是必须保证所得路径之长不超过L，而后是逐渐降低可靠性直到存在所求路为止。第二种情况是首先保证可靠度的下界，而后寻求尽可能短的路径。第三种情况是依具体情况定出含可靠性指标与长度指标的目标函数而后求此函数之极值。

四、路径的可靠性与运输量的综合考虑

设图G＝(V,U)上各弧都有两个权(c_k,p_k)，其中c_k与p_k分别表示弧u_k的容量（即通过能力的饱和上界）及可靠度。路π的容量，系指π上各弧中最小的那个弧容量，按铁道运输的情况我们考虑无向图（为统一起见，仍将链称为路径）。为了安全计，首先定出路径的可靠性的下界，称为境界信度，而后去找可靠性不小于此下界的、具有尽可能大的容量的路径。我们在此所要介绍的方法奠基于G的主子图。为给出主子图的确切定义，设π_a是具有最大容量的一条$s-t$路。

定义4.8：图G＝(V,E)的子图G′＝(V′,E′)满足以下条件时，称为G关于顶点v_s和v_t的**主子图**：

S_1：E′为E中容量不小于π_a的容量$C(\pi_a)$的弧的全体；

S_2：$V'=V$。

下面我们会看到，在主子图里最可靠的$s-t$路是容易找到的。倘若此路的可靠度不小于指定的下界，则告结束。否则把次大容量的一切弧填加到主子图中构成新的子图，并且在此新子图中找出最可靠的路径。此种扩张手续一直进行到可以找到一条可靠性不小于已给下界的路径为止；或者一直到判明不存在这种路径为止。在后一场合，必须进一步减小可靠度的下界。为了寻找主子图，必须给出一个强有力的方法，这种方法是建立在以下两个定理的基础上。

定理4.3：在图G里，存在一条容量$C(\pi)\geqslant\beta$的$s-t$路π的充分必要条件，是每一个$s-t$（弧）割集至少必须包含一个容量$c_i\geqslant\beta$的边e_i。

证明其必要性：设有一条$s-t$路π，$C(\pi)\geqslant\beta$，由于任一$s-t$割集至少要包含$s-t$路的一条边，所以每一个$s-t$割集至少含有一条容量不小于β的边。

充分性：假设一切$s-t$路的容量都小于β，这表明每一条$s-t$路都有这样的一条边，它的容量小于β。于是此图必有一个$s-t$割集，其中每一条边的容量都小于β。此$s-t$割集的构造如下：从每一条$s-t$路上取出一条容量小于β的边，于是充分性得证。

定义4.9：若将顶点v_p与v_q重合为一个新顶点，则称v_p与v_q**短路**。

当v_p与v_q重合后，它们之间的一切边也就随之而消除，但产生的平行边（即两点间的多重连接）须保留。

定理4.4：若$e_k=[v_p,v_q]$且v_p与v_q短路则：

a）所产生的新图G′包含原图G所有不含e_k的割集。

b）G′不能有关于v_s和v_t这样的割集：它们不是G中关于v_s和v_t的割集。

证明：a）设$A_{s,t}=[A,\overline{A}]$为G的不含e_k的$s-t$割集，$v_s\in A$，$v_t\in\overline{A}$．则v_p与v_q必同时

在A中；或同时不在A中。所以短路手续在G′中仍使$A_{s,t}$为一个$s-t$割集。

b）倘若当v_p与v_q短路时，在G′中产生了一个G里没有的新割集$A_{s,t}=[A,\bar{A}]$。我们考察$e_k=[v_p,v_q]$和$A_{s,t}$在G的全部可能的位置关系，只有图4—9与图4—10两种情况。对于图4—9的情况，显然当v_p与v_q短路时，$A_{s,t}$不为G′的割集。而在图4—10的情况，$A_{s,t}$不独为G′的割集，也同时是G的割集。所以在任何情况下均导致矛盾。故b）得证。

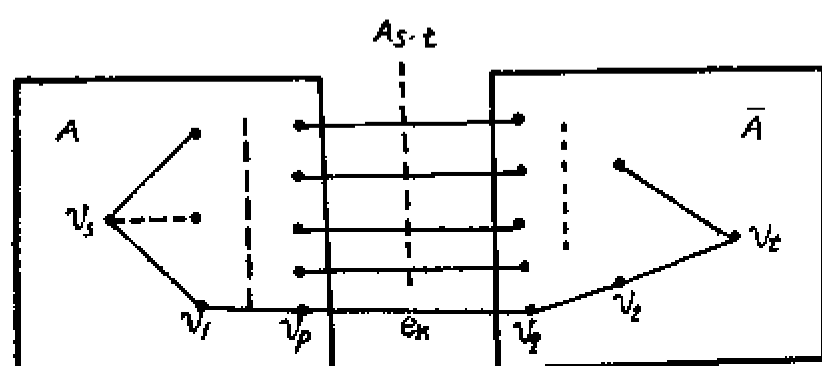


图4—9　非割集

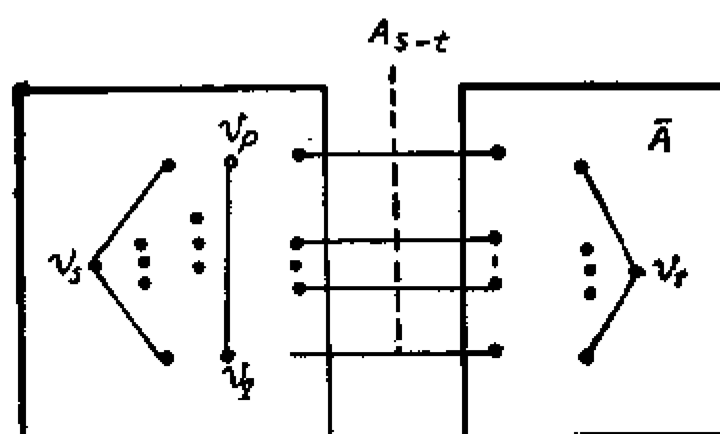


图4—10　割集

有了以上两个定理我们就可以给出构造主子图的方法。

第一步：在G里任取一个$s-t$割集$A^{(0)}_{s,t}=[A,\bar{A}]$，令$G=G_0$；

第二步：若在图G_i中，边$[v_p,v_q]$的容量不小于割集$A^{(i)}_{s,t}$的最大边容量，则将v_p与v_q短路，产生图G_{i+1}；

第三步：假设在图G_{i+1}里顶点v_s与v_t是短路的，则主子图就是G的一个延伸子图，它的边为第二步历次迭代中被消除了的G的各边；

第四步：倘若在图G_{i+1}中v_s与v_t间未成短路，则在此G_{i+1}中任取一$s-t$割集$A^{(i+1)}_{s,t}$，并返回到第二步，令$i+1\longrightarrow i$。

为了说明主子图的构造方法，我们讨论以下实倘。今对于图4—11来确定关于顶点v_s及

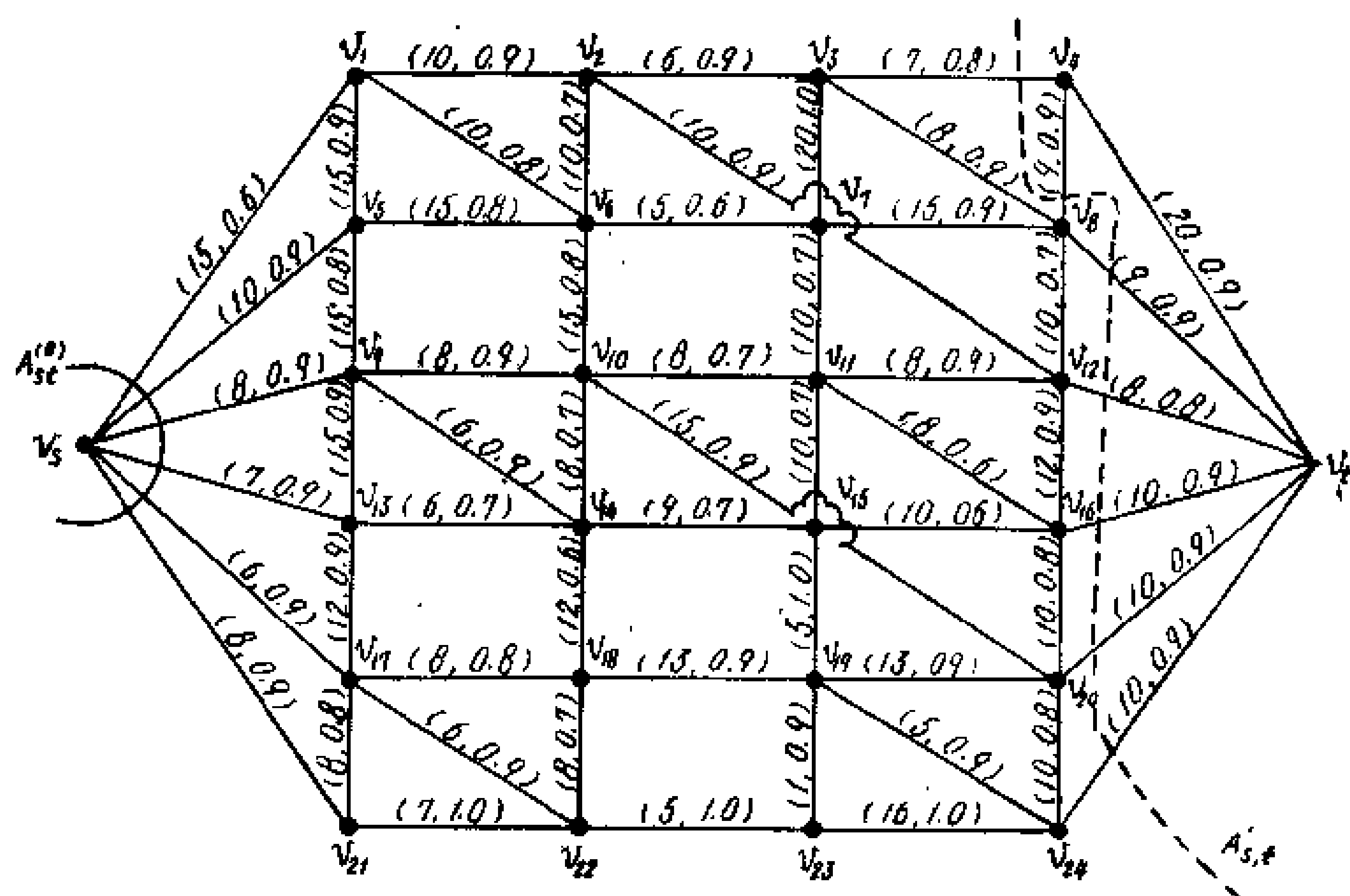


图4—11　构造主子图（1）G

v_t的主子图。

主子图的构造方法如下：

首先选取一个$s-t$割集$A_{st}^{(0)}=〔\{v_s\},\{\overline{v_s}\}〕$，在此割集中的最大的边容量为 15，每条边上的两个权，第一个为容量，第二个为可靠度。第二步将容量不小于15的一切边的端点施行短路运算，随之将这些边消除（注意，这里不要求消除容量小子15的边，它们将变为环）。这样就得到一个新图G_1并将它画在图 4 —12里。

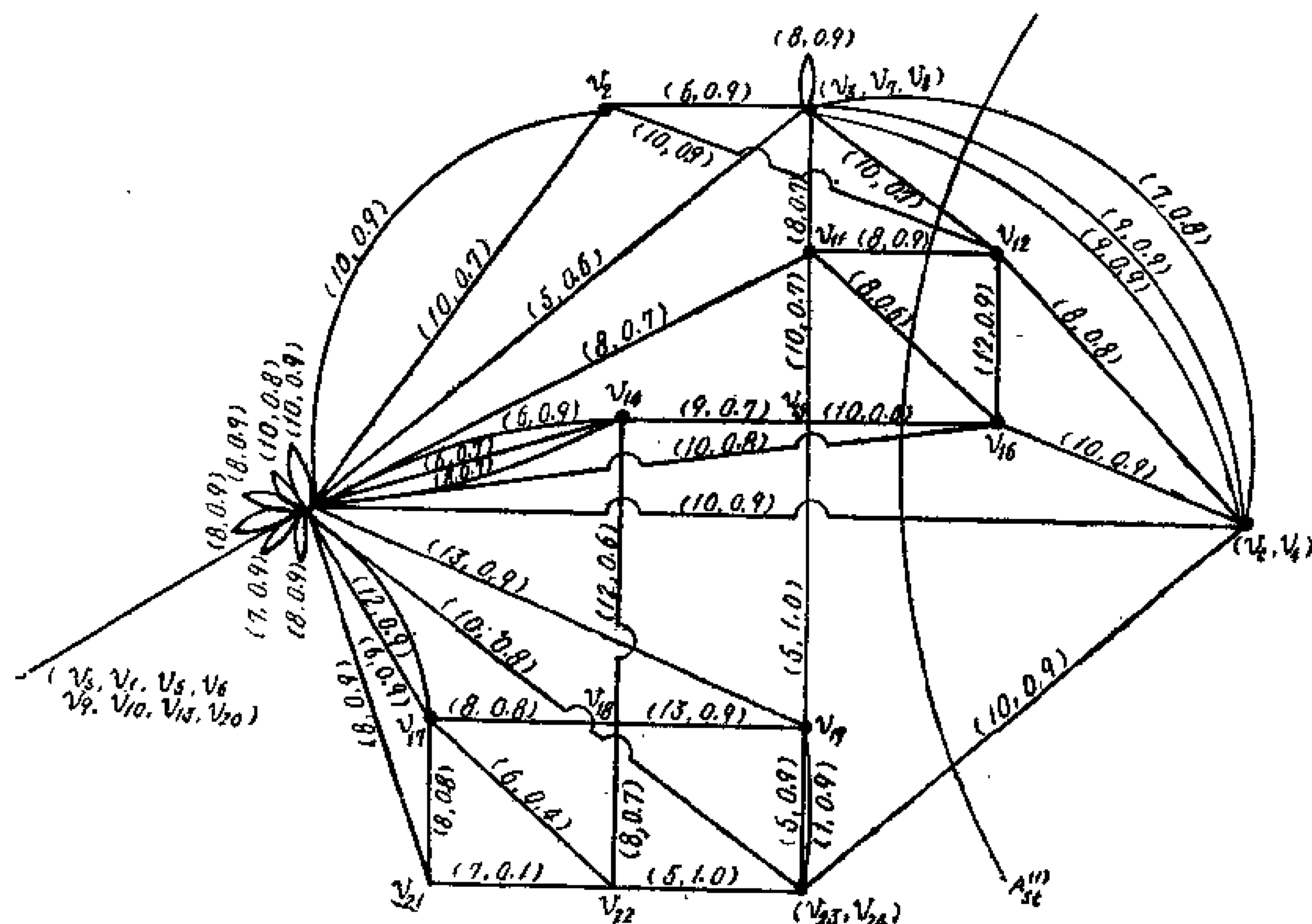


图 4 —12　构造主子图（2）G_1

从图 4 —12可见顶点v_s与v_t尚未短路。于是取 G_1 的割集 $A_{st}^{(1)}=〔A,\ \overline{A}〕$，其中$\overline{A}=\{v_4, v_t, v_{12}, v_{16}\}$。$A_{st}^{(1)}$中最大的边容量为10，故将容量不小于10的边的端点短路，并消除这些边。于是得新图G_2，如图4—13所示。在G_2中顶点v_s与v_t已短路，所以主子图的边集为由图G中消除的全部边，主子图显然包含从v_s到v_t的所有容量不小于10的路径。主子图中的$s-t$路如图 4 —14所示。

精心地选择割集可以加快主子图的产生而减少迭代过程。如在图4—11里以A'_{st}代$A_{st}^{(0)}$时，一次就可以使v_s与v_t短路。一般地说，每选一次割集所产生的新图就比前者简化一次。例如在图 4 —11里选$A_{st}^{(0)}$之后，所得新图4—12就更为简单，顶点的个数从26减少到15个，边数由58减到42个。以上列方法为基础，就可以构造出v_s与v_t间的综合最优路径。

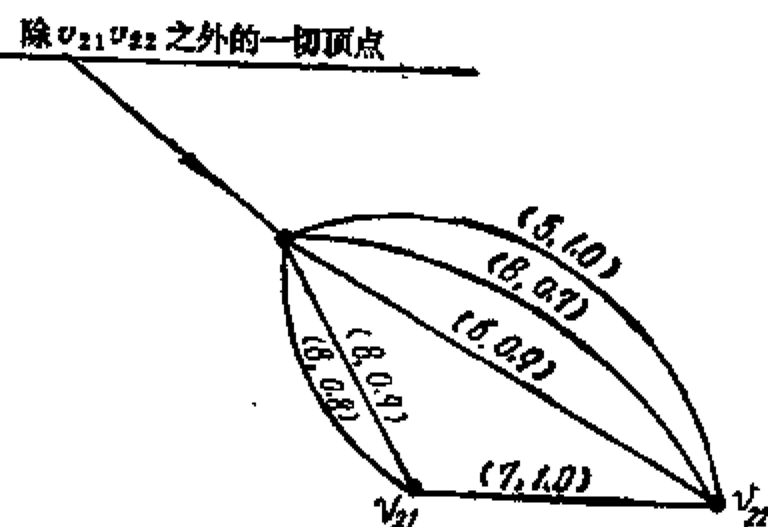


图 4 —13　构造主子图（3）G_2

五、综合最优路径方法

第一步：在主子图中确定最可靠的s-t路径。若此路的可靠度不小于境界信度，则手续终止，这时的路径是最优的。

第二步：若第一步所得路径的可靠度小于境界信度，则将G中满足下列条件的边都加到最后这个新图中去：它们的容量是小于新图中最小容量的那些边中的容量最大者。

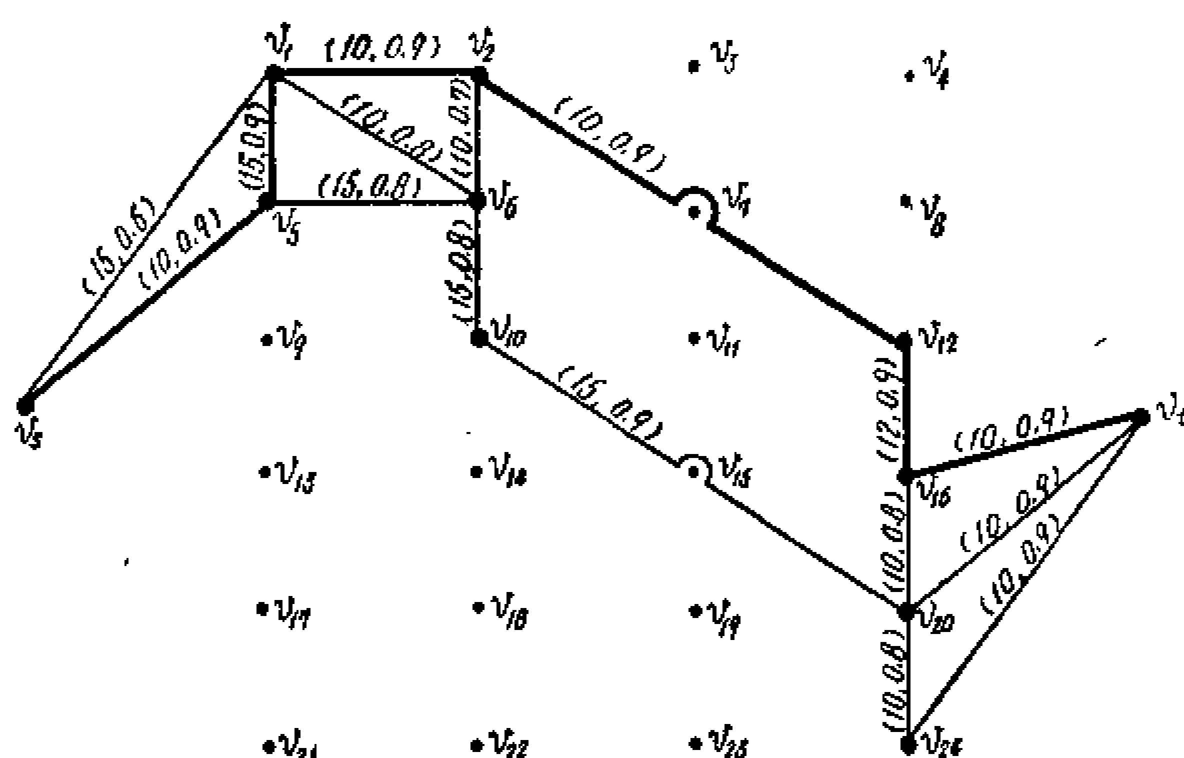


图4—14 主子图中的s-t路

第三步：在第二步所得的子图中，确定出最可靠的s-t路。若它的可靠度超过境界信度，则它为最优路径，否则返回到第二步。

例如我们需要在图4—11中找一条境界信度为0.5的最优s-t路径时，可用上列方法进行。

在图4—14的图中，最可靠路径为重线所示之路。此路的信度为0.53。对于境界信度0.5而言，它就是最优路径，此路径的容量为10。倘若取境界信度为0.6，此路就不合要求，从而必须进行上述第二步程序，即把边容量为9的所有边都加到主子图上，这样所得新图为图4—15。在这个子图上最可靠路径的信度也是0.53，它仍小于0.6。再把容量为8的边全都加到图4—15，得图4—16。在这个图里的最可靠路径的信度是0.66，它超过了境界信度0.6。这条路就是最优的，它的容量为8，我们用重线把它显示在图4—16中。

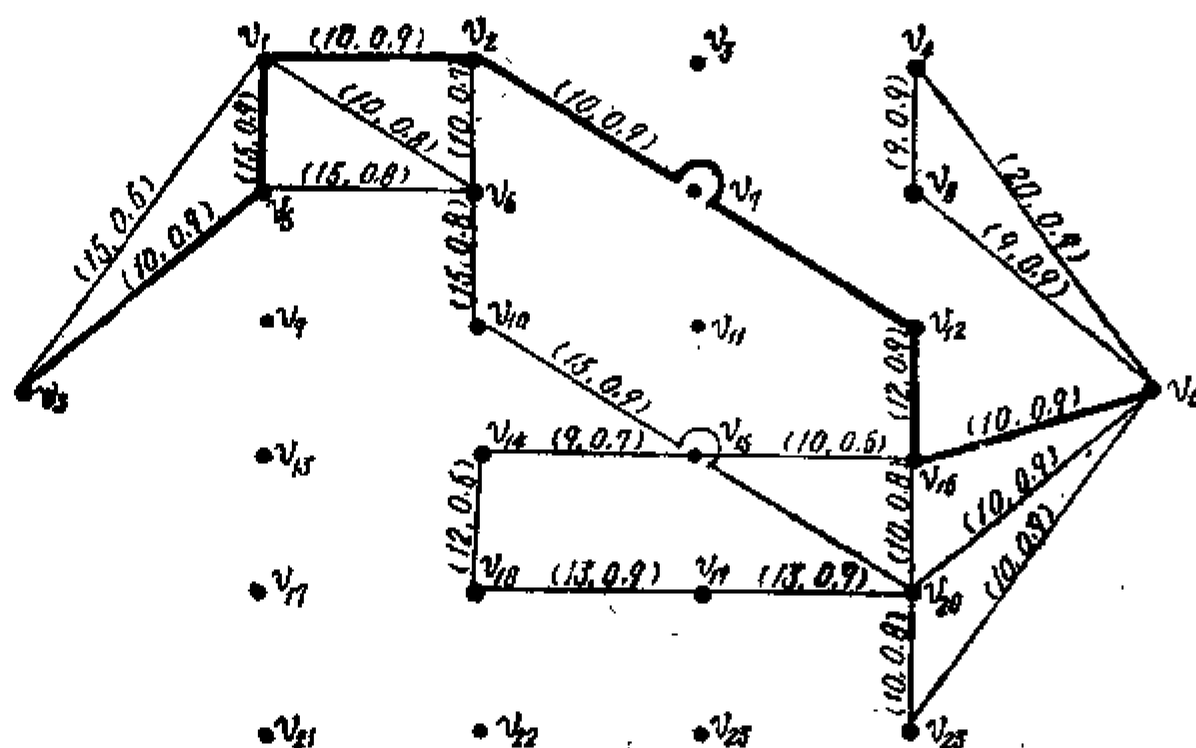


图4—15 把容量为9的边加在主子图上

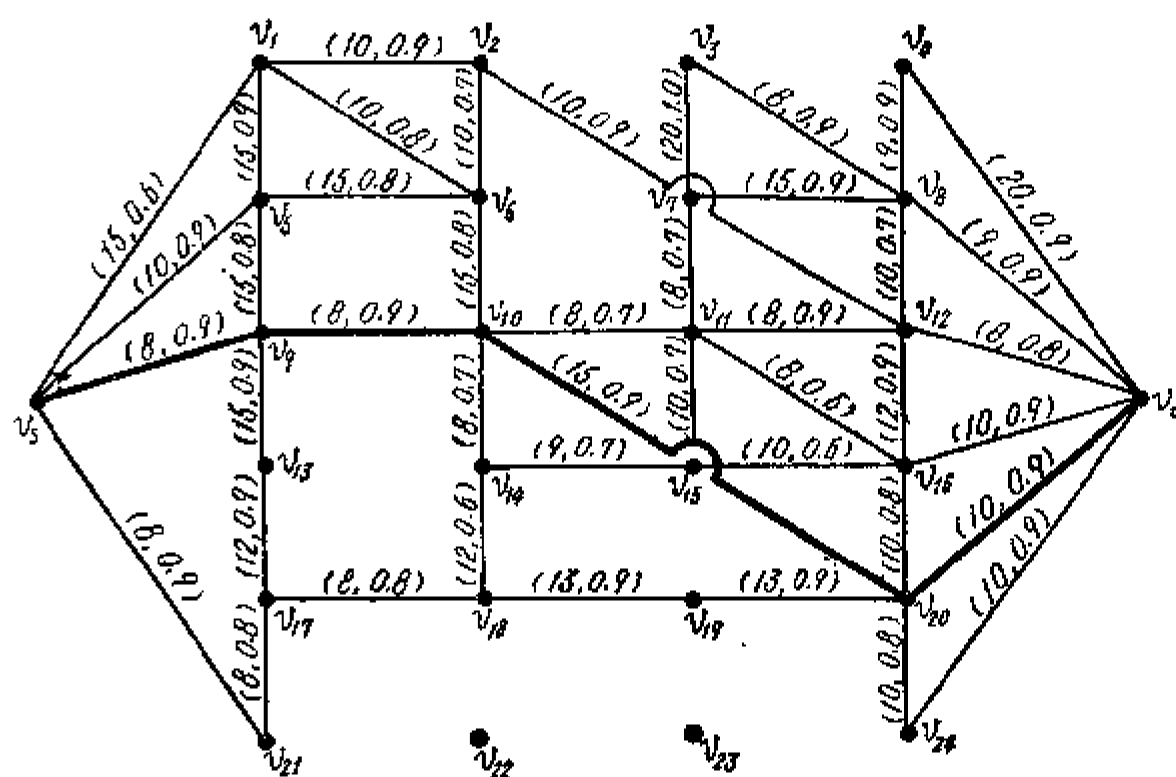


图4—16　主子图加上容量为8和9的边

习　题

1. 在图4—17中，从顶点v_1到v_3给出三条不同的基本路，哪一条是最短的？最短距离为多少？其中有回路吗？

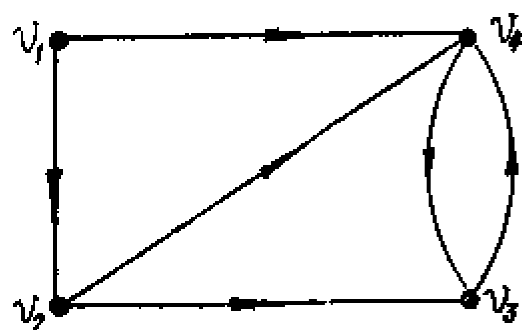


图4—17　习题1用图

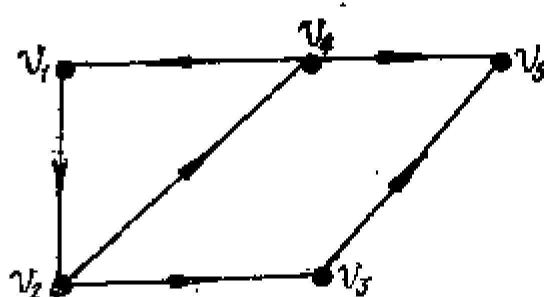


图4—18　习题2用图

2. 求出图4—18上各顶点的内半次与外半次。列出此图的一切基本回路。在图中消除一条弧使所得新图中无回路。列出图中各点的可达集。

3. 对于单纯无向图来说，距离还满足对称性：$d(u,v)=d(v,u)$。对于满足对称性的距离$d(u,v)$，试给出顶点v_1,v_2和v_3对于下列等式成立的条件：$d(v_1,v_2)+d(v_2,v_3)=d(v_1,v_3)$。

4. 对于图4—18，分别给出集合$\{v_1,v_4\}$，$\{v_4,v_5\}$和$\{v_3\}$的可达集合。

5. 对于图4—17和图4—18分别给出一个顶点基。

6. 试证在有向1-图中，若无回路存在，顶点基中的各顶点的内半次必为0。

7. 试说明图4—17和图4—18的连接性是强的还是弱的。

8. 有向1-图的直径δ定义如下：

$$\delta=\max_{u,\,v\in V} d(u,v)$$

按此求图4—17和图4—18的直径。

9. 试求图4—18的强连接分支。

10. 试求图4—19的连接矩阵A，求从顶点v_1到v_4的长度为1和2的基本路。试证从v_1到v_4存在一条长为4的单路。计算$A^{(2)}$，$A^{(3)}$和$A^{(4)}$来验证上列各结果。

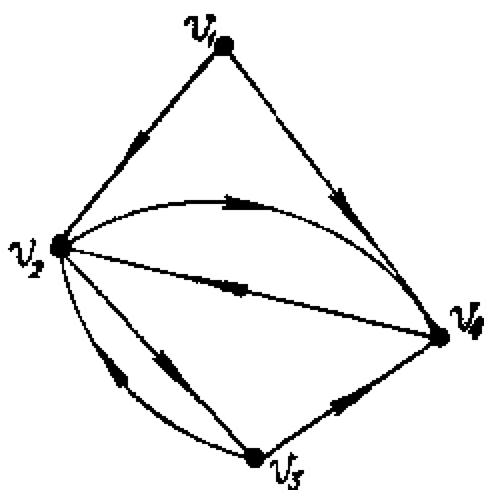


图 4 —19　习题10用图

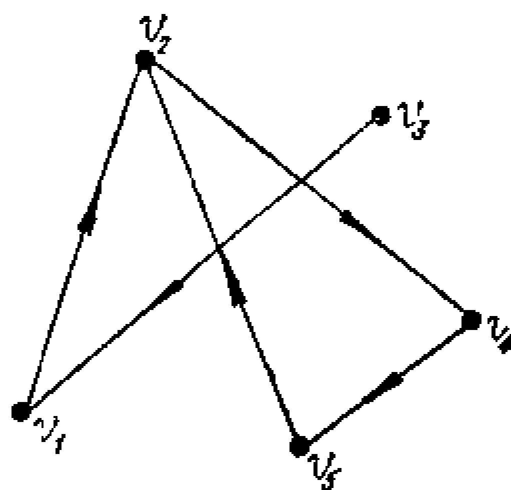


图 4 —20　习题12用图

11．对于上图 4 —19求矩阵A′，AA′和A′A。试说明A∧A′中元素的实际意义。

12．试求图 4 —20的连接矩阵A，并求它的道路矩阵A^P。

13．对于有向1-图G记A为其连接矩阵，试求图 4 —19的距离矩阵（$d_{ij}=\infty$，若$v_j \overline{\in} R(v_i)$，$d_{ii}=0$，$d_{ij}=k$，其中$k$为使$a_{ij}^{(k)}\neq 0$的最小整数）。$d_{ij}=1$的意义为何？

14．试证若图的距离矩阵的元素，除主对角线上的元素之外全都是不为 0 的数，则有向图必为强连接的。

15．提出一个最短路径问题，并用手算求解。

16．在图 4 —21中找一条由A点到B点的最短路。

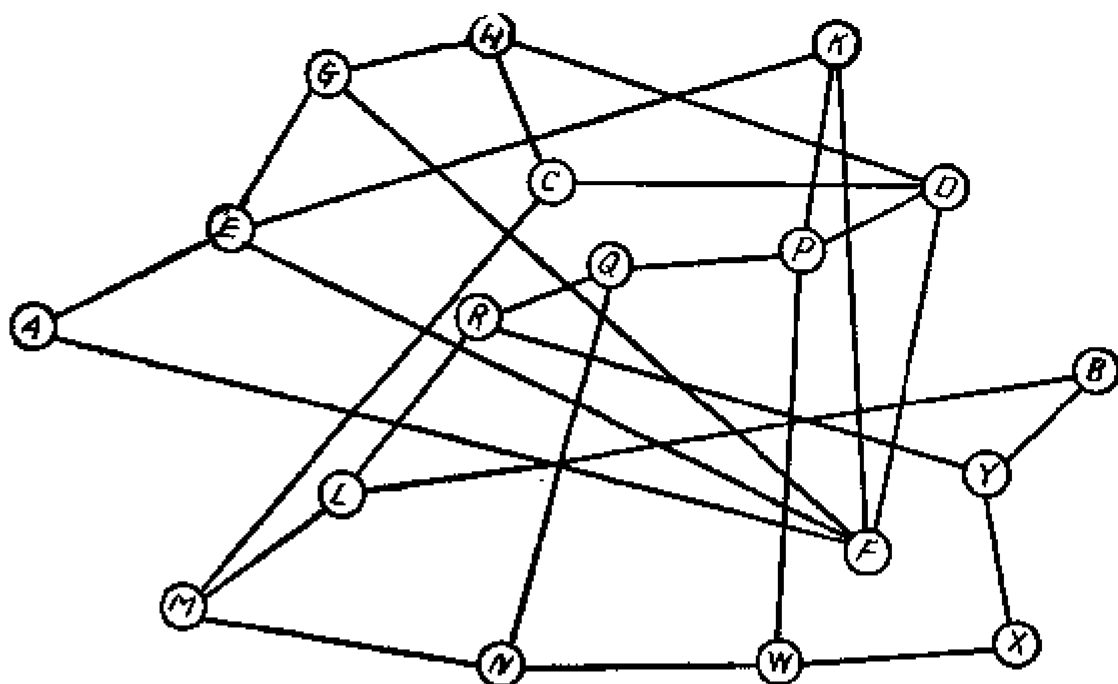


图 4 —21　最短路径的E.F.$Moore$实例

17．在图 4 —22中用标号法找出从v_s到v_t的最快的路径。各边上的标号表示旅行此段路程的时间（分）。

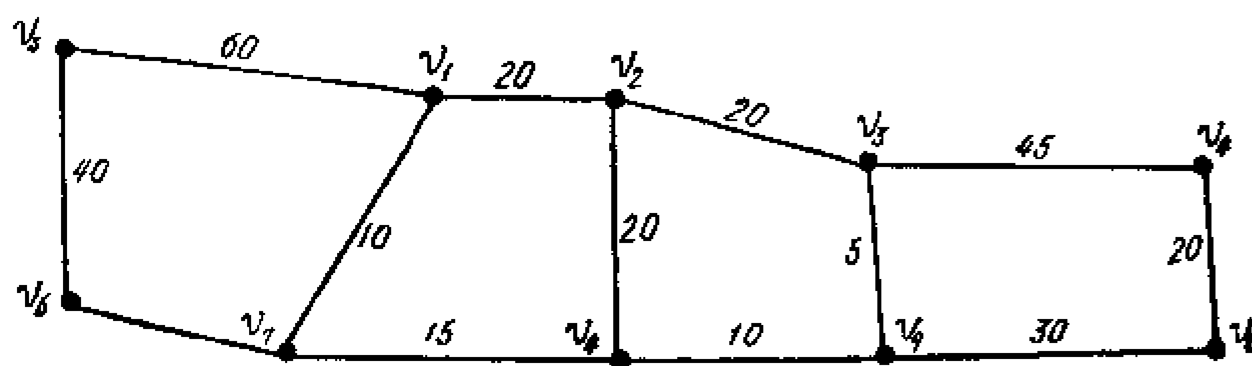


图 4 —22　最短路径的标号方法实例

路径的可靠度小于境界信

18. 试证任意路方法最多试标 $2m$ 次，其中 m 为弧数。

19. 试证若已标号、未扫描的顶点目录，按“先来先用”原则来管理，那么任意路方法所确定的路径必最短。

20. 设 T 为一个有 N 个顶点的树，边 $[v_i, v_j]$ 不在树上，将 $[v_i, v_j]$ 加在树上之后必构成一个圈。试述一种确定此圈上其它各点的算法？

21. 在图4—23里各弧上的权表示弧的长度，求从 v_1 到各顶点的最短路径。求从 v_1 到 v_9 的次短、第三和第四短的路径。

22. 接续表4—8找出 Φ_5 和 Φ_6。

23. 设G是一个具有 n 个顶点的有向图，各弧上均标有长度，并假设一切有向回路之长都 ≥ 0（请看图4—8下面的注）。若 $(v_i, v_j)\overline{\in}$ U则令 $l(ij)=\infty$。*Floyd* 给出了求最短 $i-j$ 路的一种方法：

第一步　令 $j=1$；

第二步　令 $i=1$；

第三步　令 $a(i,j)=\min\{l(ij), \min\{l(i,k)+l(k,j)\}\}$，并以 $a(i,j)$ 代 $l(i,j)$，作为弧 (v_i, v_j) 的长度。

第四步　若 $i<n$，则增大 i 之值并返回到第三步，否则进到第五步；

第五步　若 $j<n$，则增大 j 之值并返回到第三步，否则停止。那么对一切 $i\neq j$，$a(i,j)$ 必是最短 $i-j$ 路的长度。试证此方法的正确性。

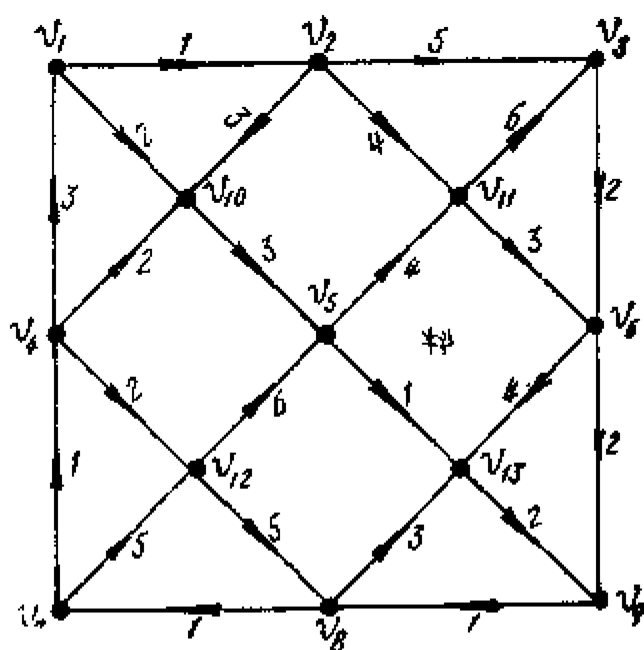


图4—23　习题21用图

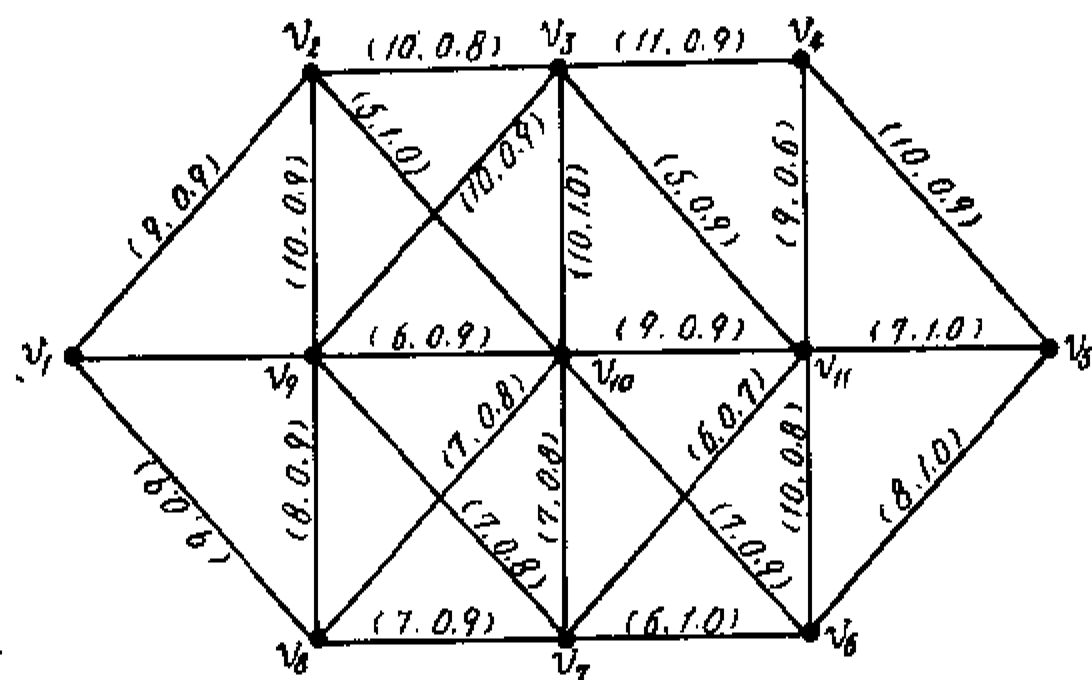


图4—24　习题24用图

24. 在图4—24中，第一个权为边的容量，第二个权为它的可靠度。利用主子图方法，求境界信度为0.7的具有最大容量的1—5路径。

25. 无向图G中两顶点 v_i 及 v_j 之间的路径的集合记为 P_{ij}，设 $p_{ij}^{(0)}$ 为 P_{ij} 中一特殊路径，试证

（1）$P_{ij}=\{p_{ij}^{(0)}\triangle C$：其中 C 为空图，或含 $p_{ij}^{(0)}$ 的圈$\}$

（2）设A为集合类，定义A的最小化minA如下：

$$\min A=\{\alpha;\ \alpha\in A，若\beta\in A则恒有\beta\overline{\supset}\alpha\}$$

依此试证　$P_{ij}=\min\{p_{ij}^{(0)}\triangle C$：其中 C 为圈或空图$\}$

（3）设E为连接的 *EULER* 图，即E中顶点的次数均为偶数。令{E}为G中全体 *EULER* 子图组成的类，试证

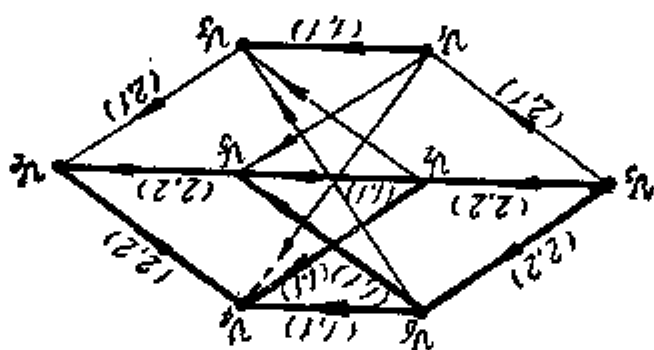
$$P_{ij}=\min[p_{ij}\triangle E；E\in\{E\}]，p_{ij} 为 P_{ij} 中一特定路$$

第五章　极大流问题

在图的应用中，特别是在交通运输、信息传递方面的应用中，极大流问题占有主导地位。因此将某些条件下的流极大化是应用图论的中心问题之一。本章从具体问题着手，介绍极大化的思想方法和相应的技巧。

第一节　引　　例

例5.1：下图5—1为一运输网。顶点v_s为发点，v_t为收点。各弧上的二元数组（a，b）中、a表示该弧的容量（见定义2.19）；b表示该弧上的流量（见定义2.19）。图中无数组的弧表示没有货物通过或流量为0。并设它们的容量全都是1。图和各弧上的容量表示运输或传输系统的设备能力。极大流问题就是利用这个固定的设备，使之发挥最大的效果，即如何安排各弧上的流量才能获得最大的运输能力。为此很容易产生这样的想法：从发点v_s出发沿着各条弧都使它们达到饱和时，必能达到最大效果。实际上问题远不是如此简单，首先遇到的问题就是在这种思想指导下难以保证流的守恒性（见定义2.20）；其次为了保证流的守恒性就要削弱某些弧上已安排好的流，因此就难于保证极大化。最后即使从v_s到v_t的每一条路径都达到了饱和，也不能保证所安排的流有极大值，这只要看一下图5—1就知道这个流确已使各条s－t路均饱和。但如果我们把（v_2，v_4）上的单位流量改送在（v_2，v_3）上而后沿（v_3，v_t）送到v_t，并将（v_s，v_1）再增加一个单位的流沿着（v_1，v_4）送到v_4。于是在原有的运输网上获得新的流，如图5—2所示。显然在图5—2中的流的值已经是6，比图5—1中的流增加了一个单位。


图5—1　极大流的初始流

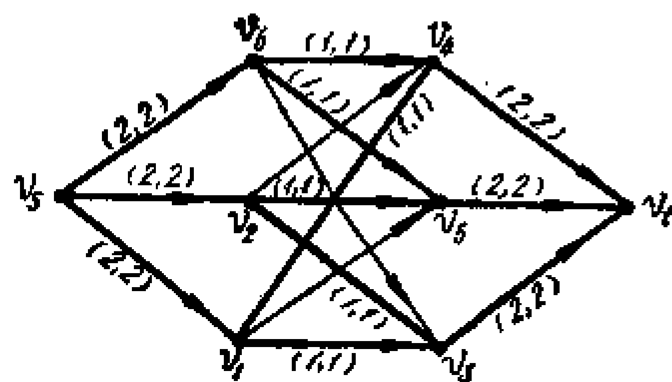


图5—2　极大流

因此在一对收发点间的极大流问题，可以概括如下：

首先在网上铺设一个初始可行流$\mathscr{F}$（见公式2.1和2.2）。

其次应奠定一种判别流$\mathscr{F}$是否为具有极大值f_{max}的原则。这就是我们将重点讨论的极大流极小截原理。

第三应建立一个方法，以便使尚未达极大值的流$\mathscr{F}$增加流量。为此我们将介绍*Ford-Fulkerson*（福德——富柯松）的标号法。

例5.2：在铁路网上经常有很多发点、收点同时发送多种货物在路网上流通。我们的目

标是要尽可能满足各方面的合理要求使达最佳的综合效果。今设图5—3上有两对收、发点v_{s_1}和v_{t_1}；v_{s_2}和v_{t_2}。各边上的三数组（a_1，a_2，a_3）．其中a_1表示该边之容量，a_2、a_3分别表示第一和第二种货物的流量。我们的目的是使两种货物流$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$的值的和$f^1_{s_1,t_1}+f^2_{s_2,t_2}$为最大。这里用的方法是：

第一步：按例5.1的单种货物流方法，首先使$\mathscr{F}_1$的值$f^1_{s_1,t_1}$达最大。我们细审各边上的流，实线箭头表示第一种货物的流向；虚线箭头表示第二种货物的流向。在图上边[v_7,v_{t_1}]和边[v_8,v_{t_1}]均已饱和；再考虑到流的相容性$f[i,j]\leqslant c[i,j]$，可知第一种货物流的值$f^1_{s_1,t_1}$已达上界$c[7,t_1]+c[8,t_1]=4+2=6$。所以第一种货物流已是极大流。在图上除去第一种货物的占用能力后，各边上的容量为$c'[i,j]=c[i,j]-f^1[i,j]$。

第二步：在以$c'[i,j]$为容量的图上，再使第二种（单一）货物流极大化，并将此流以虚线表示在图上。它的极大性可以这样来确认：从v_{s_2}发出的货物，开始时只有两条可供选用的边[v_{s_2},v_6]和[v_{s_2},v_5]。然而到v_6之后所遇到的两条新边[v_6,v_3]和[v_6,v_7]均已饱和，因此第二种货物已不能使用[v_{s_2},v_6]。所以只有唯一的边[v_{s_2},v_5]可用。然而从v_5到v_{t_2}只有唯一的一条路（v_5，v_8，v_{t_2}），这条路的容量应为边[v_5,v_8]的容量$c'[5,8]=4-2=2$。

第三步：审查以上两步的安排是否已使$f^1_{s_1,t_1}+f^2_{s_2,t_2}$达极大。初步印象很可能认为两种流之和已达极大值，实际不然。因为这时两个流的值之和为$(4+2)+2=8$。然而若将两种货物流作如图5—4所示的调整，则又可以增加2个单位的第二种货流使

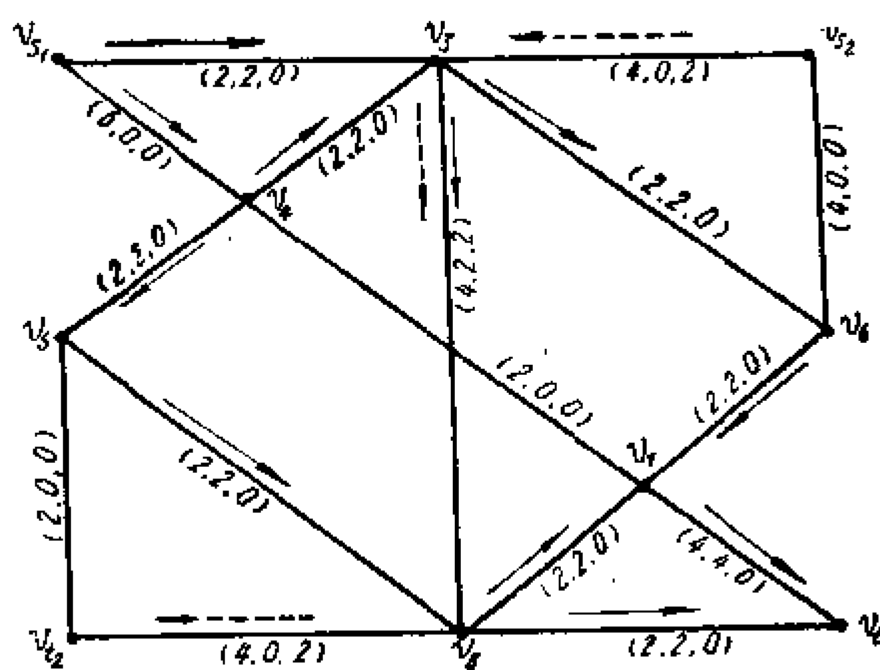


图5—3　两种货物流

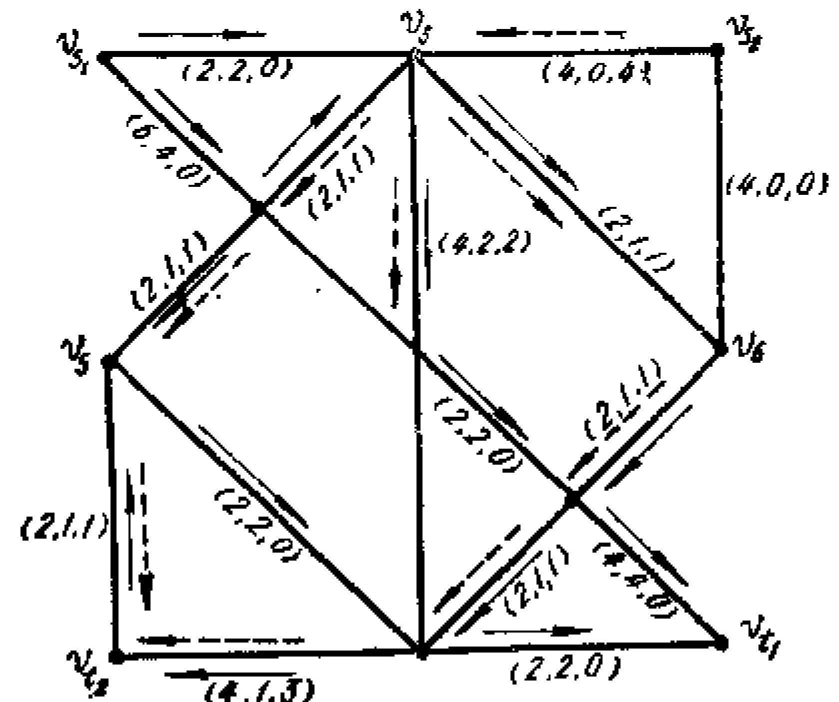


图5—4　两种货物的极大流

$f^1_{s_1,t_1}+f^2_{s_2,t_2}=10$。我们指出这已是极大值了。理由很明显，因为从$v_{s_1}$和$v_{s_2}$向各自的目的地发出的货物必须经过以下各边，即它们构成一个将一切路都切断的基本边割集

$$[v_4,v_8]，[v_5,v_8]，[v_4,v_7]，[v_6,v_7]$$

而且这些边的容量之和只有10。所以这些边均已被图5—4的流所饱和，再也不可能有额外的流通过，故此流已为极大。

现在我们对以上二例作进一步的分析。

对于一对收发点的货物流，我们提出了三个问题。但对于多对收发点的极大化不仅仍然

存在这些问题，而且还有新的问题产生。所以上面提出的三个问题是有普遍意义的。今以上列实例为基础作进一步分析。

一、初始流的确定

只要保证守恒性与相容性，即可达此目的，当然应力求初始流的值尽可能的大一些。

二、极大流极小截原理

从例5.1可见：图5—2上的流$\mathscr{F}$的值$f_{s,t}=6$；另一方面割集$A_{s,t}=\{(v_4,v_t),(v_6,v_t),(v_3,v_t)\}$的容量$C(A_{s,t})=6$。而且再也没有能使$v_s$与$v_t$分开的割集$A'_{s,t}$使$C(A_{s,t})>C(A'_{s,t})$。这说明$A_{s,t}$为最小容量的$s-t$割集（即将$v_s$与$v_t$分开之割集）。总之对例5.1成立以下结论：极大流的值$f_{s,t}$等于具有极小容量的割集$A_{s,t}$的容量值。略言之，“极大流等于极小截”。读者可以细审此结论对于例5.2也成立。这就是有名的极大流极小截原理。

三、（流的）增值法

在以上两个例子中我们看到，一般来说，初始流不是最大的。而且我们容易使从收点到发点的各条路都达饱和，可惜这并不能保证流的极大性。究其原因，如图5—2及图5—4所示，是由于流的流向安排得不合理。比较图5—1与图5—2可见调整的办法，实质上是找到了一条从发点v_s到收点v_t的链$C_{s,t}=(v_s,v_1,v_4,v_2,v_3,v_t)$，而后“沿这条链发送一个单位的货物”，即在所有与链的方向一致的弧（叫作向前弧）上，增加一个单位的流量〔在除了(v_4,v_7)的一切弧上都如此〕，而在与链的方向相反的弧(v_4,v_2)上（叫作向后弧），取消一个单位的逆流〔视为$1+(-1)=0$〕。这样流的值增加了。这就是所谓的增值法，它的关键是找一条增值链C_{s-t}。

比较图5—3与图5—4可见，找到了两条增值链$C_{s_2-t_2}=(v_{s_2},v_3,v_4,v_7,v_8,v_{t_2})$和$C_{t_2-s_2}=(v_{t_2},v_5,v_4,v_7,v_6,v_3,v_{s_2})$。对图5—3上的流作如下调整：（1）沿此二链的方向各发送一个单位的第一种货物（这是理论上的处理方法）；（2）自v_{s_2}沿$C_{s_2-t_2}$的正方向与$C_{t_2-s_2}$的反方向向v_{t_2}各发送一个单位的第二种货物（同种货物的对流相抵消）。

为了在下面证明的需要，我们还要注意到：（1）在$C_{s_2-t_2}$与$C_{t_2-s_2}$两条链的共同边上，当此共同边在二链中同向时，如$[v_4,v_7]$经调整第一种货物增加了2个单位。当此边在二链中异向时，第二种货物增加了2个单位，如在$[v_{t_2},v_3]$上；（2）只在$C_{t_2-t_2}$中而不在$C_{t_2-s_2}$中的边上，按$C_{s_2-t_2}$的正方向第一、二种货物各增加一个单位；（3）只在$C_{t_2-s_2}$中而不在$C_{s_2-t_2}$中的边上，如$[v_4,v_5]$沿$C_{t_2-s_2}$的正向增加一个单位的第一种货物，沿$C_{t_2-s_2}$的反向增加一个单位的第二种货物；（4）总之，经调整后各边的流量或者不变或者增加两个单位。

有了这些感性基础之后，我们就可以比较顺利地讨论极大流的理论问题。

第二节　极大流原理

按实际问题本身的形式，我们在这一章既讨论有向图也讨论无向图上的极大流问题。

一、传输网和流

定义5.1：一个线上或顶点上加了权的图G叫作**网**，如同定义2.19仍记为W-G。只在线上加权的图叫作**线权网**，仍记为A·W·G或E·W·G。只在顶点上加权的图叫作**点权网**，仍记为P·W·G。当网G(ω)的权表示线的容量或顶点的容量时，称此网为**传输网**，记为G（c）。这是本章讨论的主要网。当权为线或顶点提供使用的概率时，称为**随机网**，记为G(p,ω)。因此以G(p,c)表示"**随机传输网**"。

我们在这一章里只讨论1-图G所产生的网，因为对于其它的图，只要把两顶点间的平行同向线视为一条"粗"线，使它的容量为诸平行线容量之和即可。另外我们本来可以只讨论有向图，因为无向图是可以代之以有向图。不过还是有些问题，例如$[v_i,v_j]$上的容量为$c[i,j]$，当以(v_i,v_j)和(v_j,v_i)代边$[v_i,v_j]$时，两条弧上的新容量$c(i,j)$和$c(j,i)$应满足条件

$$c[i,j]=c(i,j)+c(j,i)$$

这里还应区分(v_i,v_j)和(v_j,v_i)上的流是否为同一货物。对于相同的货物还应附加条件

$$c(i,j)\cdot c(j,i)<0$$

因此，在下面我们还是直接处理无向图，而不强求方法上的一致性。

在公式（2.1)和(2.2）里已经提到有向网上的可行流概念。现在我们对于无向图给出相应的概念。

在边$[v_i,v_j]$上从v_i到v_j的流记为$f[i,j]$，并要求$f[i,j]=-f[j,i]$，由于容量的实际意义，还要求$c[i,j]=c[j,i]$。并定义$f[A,B]=\sum_{[v_i,v_j]\in E} f[i,j]$，其中$v_i\in A$　$v_j\in B$

仍用$f_{s,t}$表示流$\mathscr{F}$从v_s经网流到v_t之值。于是关于无向网上的可行流定义如下。

定义5.2：无向网上的流满足以下条件时称为可行的：

$$f[i,V]=\begin{cases} f_{s,t} & 若\ i=s \\ 0 & 若\ i\neq s,\ i\neq t \\ -f_{s,t} & 若\ i=t \end{cases} \tag{5.1}$$

$$c[i,j]\geqslant f[i,j]\geqslant -c[i,j] \tag{5.2}$$

这里$f[i,j]$为负值的意义是流实为从v_j到v_i的方向。公式（5.1）蕴含了守恒性；(5.2)表示流的相容性。

定义5.3：设顶点序列v_p，…，$v_i,v_j,\cdots v_k$，…，v_q构或一条$p-q$链C_{p-q}，则当$(v_i,v_j)\in U$时，称(v_i,v_j)为C_{p-q}链上的**向前弧**；当$(v_j,v_i)\in U$时称(v_i,v_j)为C_{p-q}链上的**向后弧**。而对于无向图总称$[v_i,v_j]$为**向前边**，$[v_j,v_i]$为**向后边**。

在图5—1中的链$C_{s-t}=(v_s,v_1,v_4,v_2,v_3,v_t)$上，$(v_s,v\ )$，$(v_1,v_4)$，$(v_2,v_3)$和$(v_3,v_t)$都是向前弧，而$(v_2,v_4)$为向后弧。

定义5.4：若(v_i,v_j)为C_{p-q}链上的向前弧，则称$f(i,j)$为链C_{p-q}的**向前流**；若弧(v_i,v_j)为C_{p-q}上的向后弧，则称$f(i,j)$为链C_{p-q}上的**向后流**。同理若$[v_i,v_j]$为向前边时，称$f[i,j]$为此链C_{p-q}上的向前流；否则称为向后流。

在图5—1中的C_{s-t}链上的$f(s,1)$．$f(3,t)$是向前流，而$f(2,4)$为C_{s-t}上的向后

定理5.1：设$\mathscr{F}$是以v_s和v_t为发点和收点的传输网上的可行流（以后简称为$s-t$流），其值$f_{s,t}$为正整数，则存在有限条$s-t$基本路P^1，P^2，…，P^k　和E路E^1，E^2

流。在图5—3和5—4中的无向网上，对$C_{s_2-t_2}=(v_{s_2},v_3,v_4,v_5,v_{t_2})$来说，边$[v_3,v_4]$为向前的，$[v_4,v_3]$为向后的。在图5—4中的$[v_3,v_4]$上第二种货物流$f^2_{[3,4]}$是向前的；在$[v_4,v_3]$上第一种货物流$f^1_{[4,3]}$对$C_{s_2-t_2}$链来说是向后的。若令$C'_{s_2-t_2}=(v_{s_2},v_6,v_7,v_4,v_3,v_8,v_{t_2})$，则对$C'_{s_2-t_2}$来说，上列所有说法均不相同。

二、残容量

在第一节的两个例子中，所以能调整初始可行流使之增大流量，关键的一步是找出一条可以增值的$s-t$链。此$s-t$链之特征是：（1）在它的向前弧（或边）上，这些线段未饱和；（2）在向后弧（边）上有向后的非零流。因此沿这个链有剩余的传输能力，概括起来给出以下定义。

定义5.5：设C_{s-t}为传输网上的一条$s-t$链，v_i及v_j为此链上相邻的两个顶点，定义弧(i,j)上的**残容量**$r_{C_{s-t}}(i,j)$：

$$r_{C_{s-t}}(i,j)=\begin{cases}C(i,j)-f(i,j) & \text{若}f(i,j)\text{为}C_{s-t}\text{上的非负的向前流；}\\ f(i,j) & \text{若}f(i,j)\text{为}C_{s-t}\text{上正的向后流。}\end{cases}$$

同理可定义**边上的残容量**$r_{C_{s-t}}(i,j)$。

定义5.6：设C_{s-t}为传输网上的$s-t$链，我们称下式给出的$r(C_{s-t})$为此**链的残容量**：

$$r(C_{s-t})=\min\{r_{C_{s-t}}(i,j):\ v_i,v_j\text{为}C_{s-t}\text{上的相邻顶点}\}$$

当$r(C_{s-t})=0$时称链C_{s-t}为**饱和的**；否则称为**非饱和的**。

例如在第一节的例5.1中，我们取$C_{s-t}=(v_s,v_1,v_4,v_2,v_3,v_t)$，对于这个链有以下结果：

$r_{C_{s-t}}(s,1)=2-1=1$　$r_{C_{s-t}}(1,4)=1-0=1$，$r_{C_{s-t}}(4,2)=1$

$r_{C_{s-t}}(2,3)=1-0=1$，$r_{C_{s-t}}(3,t)=2-1=1$。从而$r(C_{s-t})=1$。故沿此链可增加一个单位的流量。

三、流的运算

在网上铺设极大流的过程中，我们已经看到常常需要调整流向，或需要在残容量为正的链上增加流量。例如在例5.2中，我们在由$C_{s_2-t_2}$链和$C_{t_2-s_2}$链组成的圈中，沿s_2，t_2，s_2的方向增加了一个单位的第一种货物流。这个流的实际作用在于调整第一种货物的流向，它的值为零。即常常需要把值为零的流加到网上，以调整流向。

定义5.7：值为零的流叫作**零型流**，记为$\mathscr{Z}$。

定义5.8：设$\mathscr{F}_1$及$\mathscr{F}_2$为传输网G(c)上的两个可行流，我们称下列流$\mathscr{F}$为它们的和，记为$\mathscr{F}=\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2$*：

若$(i,j)\in$ U则$f(i,j)=f^1(i,j)+f^2(i,j)$

其中　$\mathscr{F}=\{f(i,j):\ (i,j)\in \text{U}\}$，$\mathscr{F}^k=\{f^k(i,j):\ (i,j)\in \text{U}\}$，$k=1,2$。

定义5.9：称空图和一些无共同弧的回路的并为E-图。设π_{s-t}为有向网上的$s-t$路，则显然存在基本路P_{s-t}和一个E-图E使

$$\pi_{s-t}=\text{P}_{s-t}\cup\text{E}。$$

* 只要把弧换为边则得无向图的相应结果。

设此路的容量为 $x=c(\pi_{s-t})$，我们用$x(\pi_{s-t})$表示这样的一个流：

若$(i,j)\in\pi_{s-t}$　　则令$f(i,j)=x$；

若$(i,j)\overline{\in}\pi_{s-t}$　　则令$f(i,j)=0$。

这个流$x(\pi_{s-t})$显然是可行的。而且有下列关系式

$$x(\pi_{s-t})=x(P_{s-t})+\mathscr{Z}(E) \tag{5.3}$$

其中$\mathscr{Z}(E)$为零型流，它在E-图E的弧上的流量为x，在E以外的弧上的流量为0。$x(P_{s-t})$的定义仿$x(\pi_{s-t})$自明。我们称公式（5.3）为路型流$x(\pi_{s-t})$的有效分解式。

由流的守恒性容易证明定理5.1。

定理5.1：设$\mathscr{F}$是以v_s和v_t为发点和收点的传输网上的可行流（以后简称为$s-t$流），其值$f_{s,t}$为正整数，则存在有限条$s-t$基本路P^1_{s-t}，P^2_{s-t}，…，P^k_{s-t}，和E-路E^1，E^2，…，E^k。使

$$\mathscr{F}=1(P^1_{s-t})+\cdots+1(P^k_{s-t})+\mathscr{Z}。 \tag{5.4}$$

其中$\mathscr{Z}$为包含E^1，E^2，…，E^k各E-路的E-路。

证明：因为$f_{s,t}>0$，所以必有$(s,j_1)\in U$使$f(s,j_1)>0$。若$j_1=t$，则$P_{s,t}=(v_s,v_t)$为一条$s-t$基本路。若$j_1\neq t$则由于v_{j_1}的守恒性，必有v_{j_2}使$f(j_1,j_2)>0$。重复上列步骤直到下列两种情况之一发生：得到一条基本$s-t$路P_{s-t}，或者一条基本路P_{s,j_k}和一个含v_{j_k}的基本回路$c(v_{j_k})$。在后一情况，必可找到一个新顶点v_{j_l}，使$f(j_k,j_l)>0$，…，最后必可达v_t。总之，必可找到一个$s-t$路$\pi^1_{s,t}=P^1_{s,t}\cup E^1$，并满足下列条件：$\mathscr{F}$在$\pi^1_{s,t}$的各弧上的流量为正；$P^1_{s,t}$为一条基本$s-t$路；$E^1$为一条E-路。于是有可行流$\mathscr{F}_1$存在，使

$$\mathscr{F}=\mathscr{F}_1+1(P^1_{s-t})+\mathscr{Z}(E^1)$$

其中$\mathscr{Z}(E^1)$为在E^1上的单位零流。而$\mathscr{F}_1$的值为$f_{s,t}-1$。重复上列步骤则得

$$\mathscr{F}=1(P^1_{s-t})+1(P^2_{s-t})+\cdots+1(P^k_{s-t})+\mathscr{Z}$$

其中$\mathscr{Z}=\mathscr{Z}(E^1)+\mathscr{Z}(E^2)+\cdots+\mathscr{Z}(E^k)+\mathscr{Z}'(E')$。$\mathscr{Z}'(E')$为E-图$E'$上的零型流。

四、s-t整数流$\mathscr{F}$的分解法

由上列定理可得整数流的分解方法

第一步：令$i=0$；

第二步：找一个单位的$s-t$路型流$1(\pi^{i+1}_{s-t})$；

第三步：令$\mathscr{F}_{i+1}=\mathscr{F}_i-1(\pi^{i+1}_{s-t})$，而$\mathscr{F}_0=\mathscr{F}$；

第四步：设$1(\pi^{i+1}_{s-t})=1(P^{i+1}_{s-t})+\mathscr{Z}(E^{i+1})$　其中$\pi^{i+1}_{s-t}=P^{i+1}_{s-t}\cup E^{i+1}$；

第五步：若$\mathscr{F}_{i+1}$的值大于零，则以$i+1$代i　返回第三步，否则找零流型$\mathscr{Z}'$；

第六步：令$\mathscr{Z}=\mathscr{Z}(E')+\cdots+\mathscr{Z}(E^k)+\mathscr{Z}'(E')$；

第七步：$\mathscr{F}=\mathscr{Z}+1(P^1_{s-t})+1(P^2_{s-t})+\cdots+1(P^k_{s-t})$。

例5.3，在图5—5中给出了一个$s-t$流$\mathscr{F}$，我们可以用不同的方法把它分解。

第一种分解为：$\mathscr{F}=2(P^1_{s-t})+2(P^2_{s-t})+2(P^3_{s-t})+\mathscr{Z}$

其中$P^1_{s-t}=(v_s,v_3,v_6,v_7,v_t)$，$P^2_{s-t}=(v_s,v_4,v_3,v_8,v_t)$，$P^3_{s-t}=(v_s,v_4,v_6,v_8,v_7,v_t)$。$\mathscr{Z}$为纯零型流（即各弧上均为零的流）。于是得

$\mathscr{F}=2(P^1_{s-t})+2(P^2_{s-t})+2(P^3_{s-t})$。

第二种分解为：$\mathscr{F}=1(P^1_{s-t})+1(P^2_{s-t})+1(P^3_{s-t})+2(P^4_{s-t})+1(P^5_{s-t})+\mathscr{Z}$。

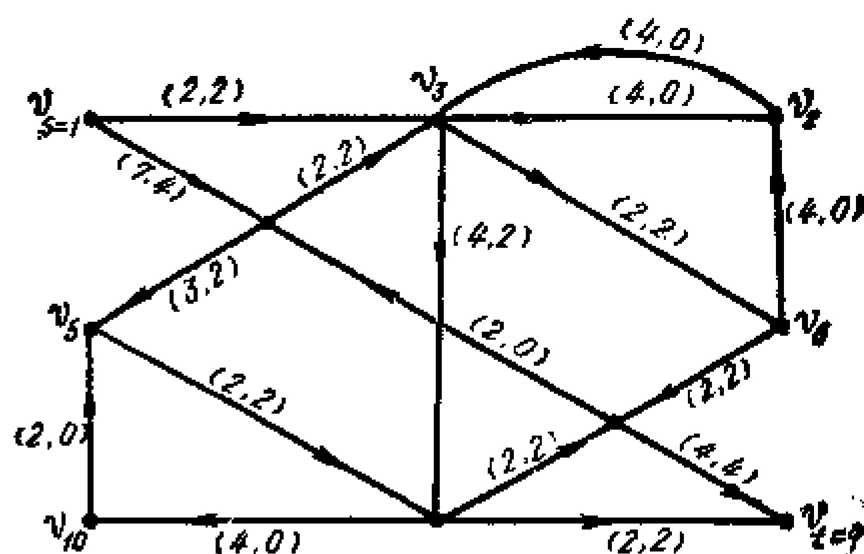


图 5 — 5　流的分解

其中$P^1_{s-t}=(v_s,v_3,v_6,v_7,v_t)$ ， $P^2_{s-t}=(v_s,v_4,v_3,v_6,v_7,v_t)$ ， $P^3_{s-t}=(v_s,v_4,v_3,v_8,v_t)$ ， $P^4_{s-t}(v_s,v_4,v_6,v_8,v_7,v_t)$ ， $P^5_{s-t}=(v_s,v_3,v_8,v_t)$ 。$\mathscr{F}$也是纯零型流。

五、极大流、极小截原理

定义5.10：设$\{A^{(1)}_{s,t},\cdots, A^{(K)}_{s,t}\}$为传输网$G(c)$上所有$s-t$割集的集合，并令

$$\tau_{s,t}=\min\{c(A^{(i)}_{s,t}):\ i=1,\ 2\cdots,\ k\}$$

则$\tau_{s,t}$为$s-t$割集的最小容量。由于割集的有限性，所以必存在割集$B_{s,t}$使$C(B_{s,t})=\tau_{s,t}$（一般来说，具有最小容量的割集不唯一）。并称上列$\tau_{s,t}$为$G(c)$的**极小截**；称$B_{s,t}$为**极小截集**。

极小截是传输网本身的性质，从实际观点来看，它反应网的性能。由于任何$s-t$可行流$\mathscr{F}$要想达收点v_t，必须流经每一个$s-t$割集，因此$\mathscr{F}$的值$f_{s,t}$由于可行流的相容性，可知

性质5.1：对于任一可行$s-t$流$\mathscr{F}$，它的值必满足条件

$$f_{s,t}\leqslant\tau_{s,t}$$

增值法

第一步：确定一个初始可行$s-t$流$\mathscr{F}$（至少纯零型流为可行的），若$f_{s,t}=\tau_{s,t}$则方法终止。否则进入第二步；

第二步：找一条非饱和$s-t$链C_{s-t}：$r(C_{s,t})>0$，并称此链为增值链；

第三步：在增值链C_{s-t}上增加流量$r(\pi_{s,t})$；

第四步：重复二、三两步直到找不到增值链为止。

显然由于容量为整数，所以增值方法所提供的也是整数流，而且$f_{s,t}$的值每次经调整也必增加一个正整数，另一方面极小截$\tau_{s,t}$为有限，所以上述增值法在实施有限次之后必停止。

定理5.2：增值方法停止的充分必要条件是$f_{s,t}\geqslant\tau_{s,t}$。

证明：设增值法已终止，往证$f_{s,t}\geqslant\tau_{s,t}$。定义集合L如下：

$$v_s\in L$$

$$\text{若}v_i\in L,\ C(i,j)>f(i,j)\text{或}f(j,i)>0\text{，则令}v_j\in L \tag{5.5}$$

下边来证明$f_{s,t}=C(L,\overline{L})\geqslant\tau_{s,t}$，其中$C(L,\overline{L})=\sum\limits_{(i,j)\in(L,\overline{L})}C(i,j)$。

由于$v_t\in\overline{L}$，因为否则的话就应该还有一条增值链，这与增值法已停止的假设矛盾，故$\overline{L}$

非空。由于 $(L,\overline{L})$ 为一个 $s-t$ 割集，故显然有$C(L,\overline{L})\geqslant\tau_{s,t}$。又因

$$f_{s,t}=f(L,\overline{L})-f(\overline{L},L)$$

且对任一$(i,j)\in(L,\overline{L})$ 则$f(i,j)=C(i,j)$ 所以$f(L,\overline{L})=C(L,\overline{L})$；

若 $(i,j)\in(\overline{L},L)$则$f(i,j)=0$， 故有$f(\overline{L},L)=0$。

由以上四式得证

$$f_{s,t}=C(L,\overline{L})\geqslant\tau_{s,t}$$

若$f_{s,t}\geqslant\tau_{s,t}$则由第一步可知增值法终止，于是定理得证。

由以上结论可以推出**极大流极小截原理**：

对于一切可行 $s-t$ 流$\mathscr{F}$，恒有

$$\max[f_{s,t}]=\min[C(A_{(t)}^{(s)})]=\tau_{s,t} \tag{5.6}$$

这个原理的重要性在于指明下列事实：只要流的值$f_{s,t}<\tau_{s,t}$，必有增值路存在以增大流量，直到使流加大到$f_{s,t}=\tau_{s,t}$为止。然而如何才能找到增值路，以上证明并未提供有效方法，为此我们来讨论标号法。

六、标号方法

此方法对于加大 $s-t$ 流的值 $f_{s,t}$ 是非常有效的，它是由标号手续和增值手续来完成的。标号手续是用来找增值链，也可以用来找上述顶点集L。这个方法之所以快速有效是基于这样的事实：在找增值链时，每一顶点至多受检一次，这与最短路径方法的标号法是一致的。所不同的是这里对每一顶点给出三个标号，对于一般性顶点 v_j 而言，第一个标号是顶点$v_i\in L$的脚号 i；v_i与 v_j的关系满足公式(5.5)。第二个标号当$C(i,j)-f(i,j)>0$时为加号“+”；当$f(j,i)>0$ 时为减号“-”。第三个标号为刚达到的这段增值链的残容量。当标号手续找到一条增值链C_{s-t}之后，则应用增值手续沿C_{s-t}增加$r(C_{s,t})$流量。此方法的收敛性已在定理5.2之前提到。

标号手续

第一步：将 v_s标为$[s,+,\varepsilon(s)=\infty]$。于是称 v_s为已标号、未扫描，而其它所有点均为未标号未扫描的点。

第二步：选取一个已标号未扫描过的顶点v_x，若v_y尚未标号，则当

1. $(y,x)\in U$、$f(y,x)>0$时，将 v_y标上$[x,-,\varepsilon(y)]$，其中 $\varepsilon(y)=\min\{\varepsilon(x),f(y,x)\}$。之后称顶点 v_y为已标号、尚未扫描。

2. $(x,y)\in U$且$C(x,y)>f(x,y)$时，将v_y标上$[x,+,\varepsilon(y)]$，其中 $\varepsilon(y)=\min\{\varepsilon(x),C(x,y)-f(x,y)\}$，之后称顶点 v_y为已标号，尚未扫描。

当v_x的邻域$\Gamma_G(v_x)$中的一切点 v_y 都被检查过之后，将 v_x的第二个标号“+”或“-”用一个小圆圈起来，并说 v_x是已标号且已扫描过。

第三步：重复第二步直到 v_t获得标号，或者不能再继续进行标号为止。若出现后一情况则停止，若出现前一情况则转入增值手续。

增值手续

第一步：令 $z=t$ 并转入下一步。

第二步：若 v_z 上的标号为$(q,+,\varepsilon)$，则将$f(q,z)$增加 $\varepsilon(z)$。若 v_z上的标号为

$(q,-,\varepsilon)$，则将 $f(z,q)$ 减少 $\varepsilon(t)$（注：这些"+"或"−"号上也可能已被小圆圈起来了）。

第三步：若 $q=s$，则擦去一切标号，并转回到标号手续的第一步。否则令 $z=q$，并转回增值方法的第二步。

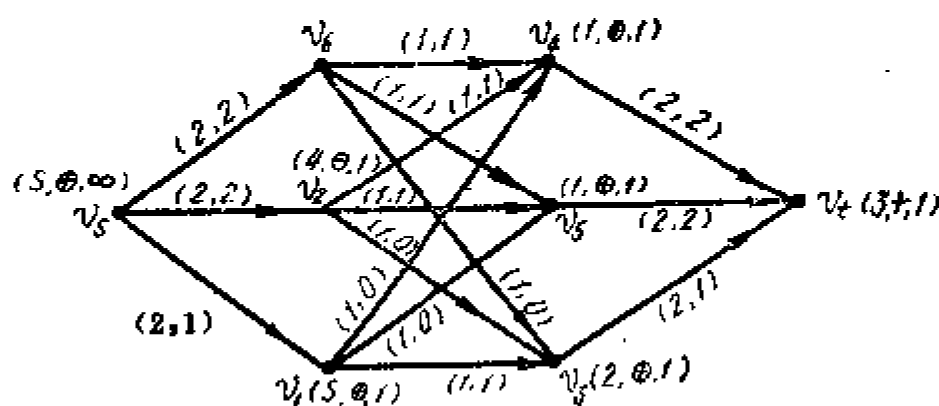


图 5－6　标号方法

我们重新来审查本章第一节的例5.1,以便说明标号方法的使用。

首先将 v_s 标上$(s,+,\infty)$。在v_s的邻域 $\Gamma_G(v_s)=\{v_6,\ v_2,v_1\}$ 中只有 v_1与 v_s满足公式(5.5)中的关系：$C(s,1)>f(s,1)$。于是按标号手续的第二步中(2)将 v_1标上$(s,+,1)$，此处第三个标号 $1=\min\{\infty,C(s,1)-f(s,1)=2-1=1\}$。并将$v_s$上的"+"号圈起来。在$\Gamma_G$（$v_1$）中只有$v_4$与$v_5$同$v_1$满足标号手续中第二步之（2）中的关系，随即把它们标上号$v_4(1,+,1)$，$v_5(1,+,1)$。并将v_1中的"+"号圈起来。对于 v_6 邻域中的任一点与 v_5 都没有可标号的关系，于是 v_5作为已标号、已扫描的点将其中"+"号圈起来。我们再来扫描v_4，可见在Γ_G（v_4）中，只有v_2同v_4有标号关系：$(v_2,v_4)\in U$，$f(2,4)>0$。从而将v_2标上$(4,-,1)$，并将v_4的标号改为$(1,\oplus,1)$。在$\Gamma_G(v_2)$中只有 v_3 与 v_2 有标号关系：$(v_2,v_3)\in U,C(2,3)>f(2,3)$。于是将$v_3$标上$(2,\ +,1)$，并将$v_2$的标号改为$(4,\ominus,1)$。从$v_3$进行扫描时，可见在$\Gamma_G(v_3)$中只有$v_t$同$v_3$有标号关系：$(v_3,\ v_t)\in U$，$C(3,1)>f(3,1)$，随即将$v_t$标上$(3,\ +,1)$并将$v_3$的标号改为$(2,\oplus,1)$。这里$\varepsilon(t)=1$，自$v_t$按照第一个标号如同找最短路径那样，定出增值链$C_{s-t}=(v_t,\ v_3,\ v_2,\ v_4,v_1,v_s)$。在$C_{s-t}$链的向前（按由$v_s$到$v_t$的方向）弧上，即$(s,1)$，$(1,4)$，$(2,3)$，$(3,\ t)$ 各弧上增加$\varepsilon(t)=1$单位的流量；而在C_{s-t}的向后弧$(2,4)$上减少$\varepsilon(t)=1$单位的流量。从而得图 5 — 2 上所标记的极大流。在图 5－2 中标号方法已不能再进行，故流已极大。

七、极大流极小截定理的推广

许多与极大流问题看起来很不相同的问题，如稍加修改可化为极大流问题，分述于下。

点权网上的极大流问题。假设图中各弧的容量不受限制，但顶点上的容量都受到严格限制。在第二章已讲到这种点权网，我们可以很容易地把这种网变为前述传输网。这只要把每一个顶点v_i分裂为两个v_i'和v_i''，同时在它们之间连一条弧$(v_i',\ v_i'')$，并约定所有可达v_i的顶点，都改为到达v_i'，而由v_i到它的可达集R（v_i）的弧（v_i，v_j）均改为(v_i'',v_j)。并给弧（v_i',v_i''）以容量$C(v_i',v_i'')=C(v_i)$，而将原有各弧均令其容量为$+\infty$。这样就可把点权图上的极大流问题化为一般传输网上的问题。

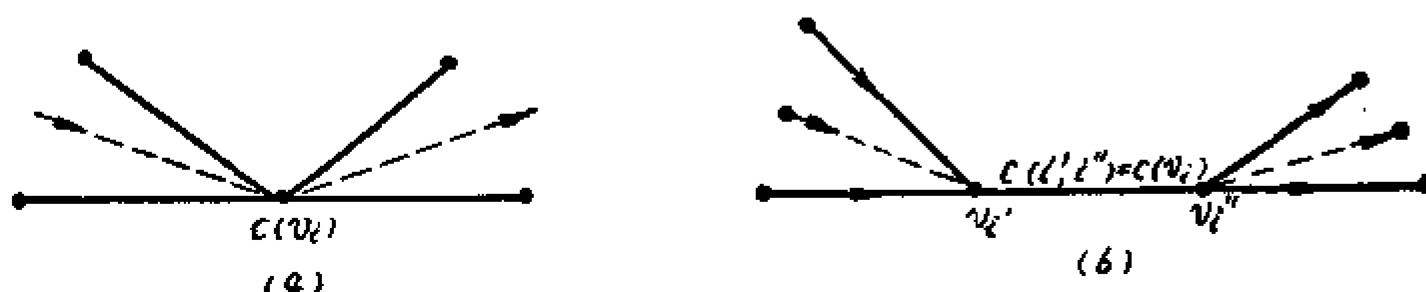


图 5－7　点权图的转化

八、多个收发点的同一种货物的极大流问题

倘若在传输网上不止一对，而是有多个收、发点v_{s1}，v_{s2}，…，v_{sk}，v_{t1}，…，v_{tl}时，而且假设都是收、发同一种货物。我们在图5—8中放入两个新的点v_s作为新发点，v_t作为新收点，并连接新的弧(s, s_1)，(s, s_2)，…，(s, s_k)和(t_1, t)，(t_2, t)，…，(t_l, t)，同时指定它们的容量全是$+\infty$，这样就又化为一般传输网上的极大流问题。在得到极大流$\mathscr{F}$之后，则把通过v_{si}的货物均由v_{si}发送，经由v_{tj}的流均由v_{tj}收留。

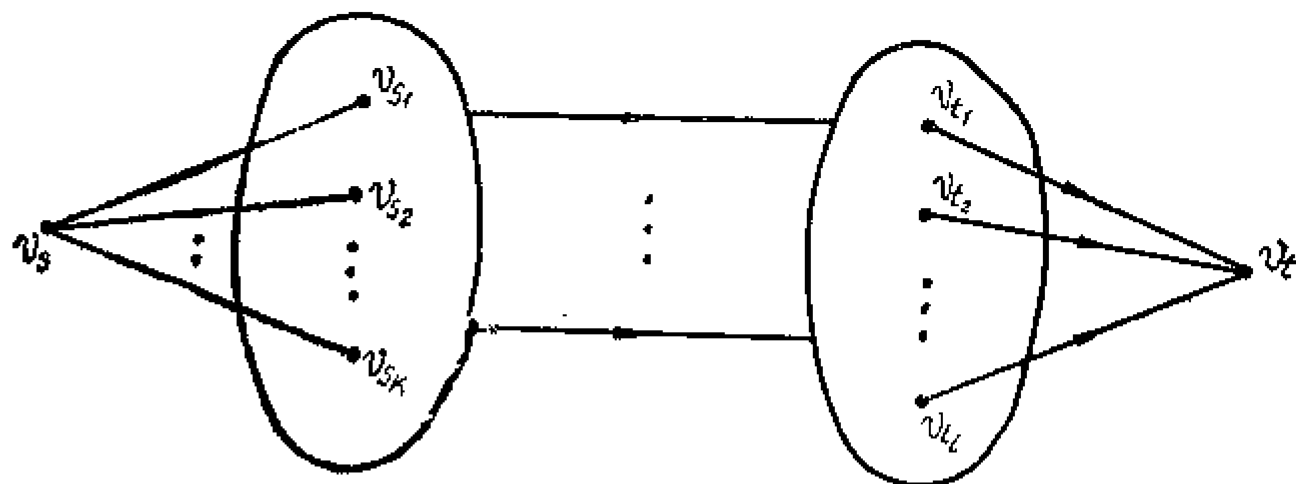


图5—8 多收发点的传输网

第三节 多种货物流问题

经常需要在传输网上同时流通多种货物，并要使传输总量极大化，这就是多种货物的极大流问题。假设有k种货物，第l种货物在(i, j)上的流记为$f_{(i,j)}^{(l)}$。当集合$\{f_{(i,j)}^{(l)}:(i, j)\in U\}$满足相容性和守恒性条件时，称第$l$种流为可行流，记为$\mathscr{F}^l$。一般假设每种货物都有自己专有的收、发点$v_{sl}$和$v_{tl}$。倘若实际情况并非如此，则可以作如下图5—9所示的变更。并设所加弧上的容量均为$+\infty$；$d^+(v_{s_l})=1$，$d^-(v_{t_l})=1$。我们把第l种货物由v_{s_l}到v_{t_l}的值记为$f_{s_l,t_l}^{(l)}$。关于多种货物的限制条件与单一货物类似，它们是对一切i和l：

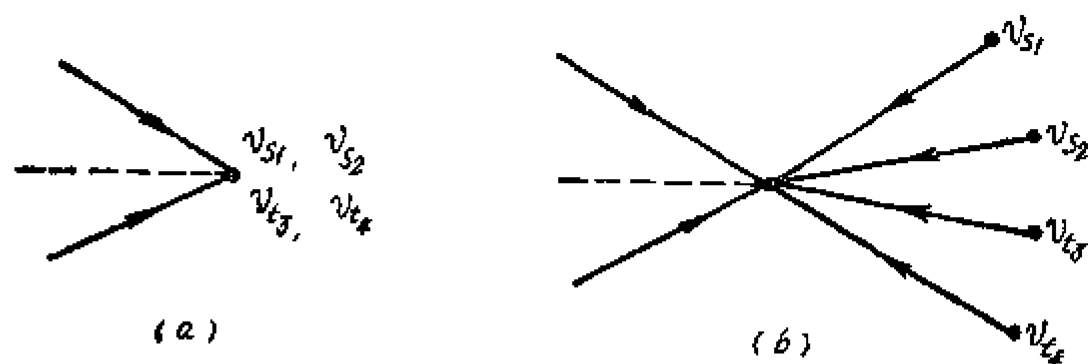


图5—9 多种货物收、发点的专有化

$$f_{(i,j)}^{(l)}-f_{(j,i)}^{(l)}=\begin{cases} f_{s_l,t_l}^{(l)} & 若i=s_l \\ 0 & 若i\neq s_l,t_l \\ -f_{s_l,t_l}^{(l)} & 若i=t_l \end{cases} \tag{5.7}$$

对一切$(i,j)\in U$，
$$C(i, j)\geqslant\sum_{l=1}^{k}f_{(i,j)}^{(l)} \tag{5.8}$$

$$f^{(l)}_{(i,j)} \geqslant 0 \tag{5.9}$$

以上是对于有向图的限制，对于无向图也有完全类似的限制，对一切 i 和 l，

$$f^{(l)}_{(i,V)} = \begin{cases} f^{(l)}_{s_l,t_l} & 若 i = s_l \\ 0 & 若 i \neq s_l, t_l \\ -f^{(l)}_{s_l,t_l} & 若 i = t_l \end{cases} \tag{5.10}$$

对一切$[i, j] \in E$ $\quad C[i, j] \geqslant \sum_{l=1}^{k} |f^{(l)}[i, j]|$ (5.11)

一、多种货物流的问题

我们用r_{s_l,t_l}表示从发点v_{s_l}向收点v_{t_l}需要发送的货物流，在不致混淆的情况下记为r_l。于是多种货物流的问题可以给出如下的确切提法。

问题1：确定对需求量$r_1, r_2, \cdots, r_k$的要求得以实现的充分必要条件。即对于指定的$r_1, r_2, \cdots, r_k$可以找到k个满足公式（5.7），（5.8）和（5.9）或（5.10）和（5.11)的流$\mathscr{F}^1, \mathscr{F}^2, \cdots, \mathscr{F}^k$，使$f^{(l)}_{s_l,t_l} = r_l$，$l = 1, 2, \cdots, k$。

问题2：求 $\sum_{l=1}^{k} f^{(l)}_{s_l,t_l}$ 在既定传输网上的极大值。

多种货物流比起单一货物来复杂之处在于：

1. 有缝。设$\tau_{s_1,s_2,\cdots,s_k;\ t_1,t_2,\cdots,t_k}$为网上将所有收、发点对$(s_l, t_l)$都分离开的割集中具有最小容量的那种割集（一般不唯一）的容量。与单一货物流不同，$\sum_{l=1}^{k} f^{(l)}_{s_l,t_l}$的最大值不能保证达到$\tau_{s_1,s_2,\cdots,s_k;\ t_1,t_2,\cdots,t_k}$，即多种货物流不能保证充分利用设备能力。用图的语言说，就是多种货物流有时是有缝的：

$$\max \sum_{l=1}^{k} f^{(l)}_{s_l,t_l} < \tau_{s_1,\cdots,s_k;\ t_1,\cdots,t_k} \tag{5.12}$$

即最大流与最小截$\tau_{s_1,\cdots,s_k;\ t_1,\cdots,t_k}$之间有空隙。单一货物流都是无缝的。我们还将证明假设在无向网上各边的容量全是偶整数时，其上的两种货物流也是无缝的。然而，这个结论对多种货物流一般是不成立的。在下面的图5—10中，我们给出了一个有缝图的例子。因为$\tau_{s_1,s_2,s_3;\ t_1,t_2,t_3} = C(L, \overline{L}) = 8$，其中顶点集$L = \{v_{s_1}, v_{s_2}, v_{s_3}\}$，各边的容量均为2，已注在各边之旁。另一方面对于$l = 1, 2, 3$，每一$s_l$-$t_l$路至少含有三条边。故每一单位的$f^{(l)}_{s_l,t_l}$至少需要三个单位的边容量，所有边容量之总和为20。从而

$$3\max \sum_{l=1}^{3} f^{(l)}_{s_l,t_l} \leqslant 20$$

即

$$\max \sum_{l=1}^{3} f^{(l)}_{s_l,t_l} \leqslant \frac{20}{3} < 8$$

所以网中最大流小于极小截，这表明网有缝。

5.1，以便说明标号方法的使用。

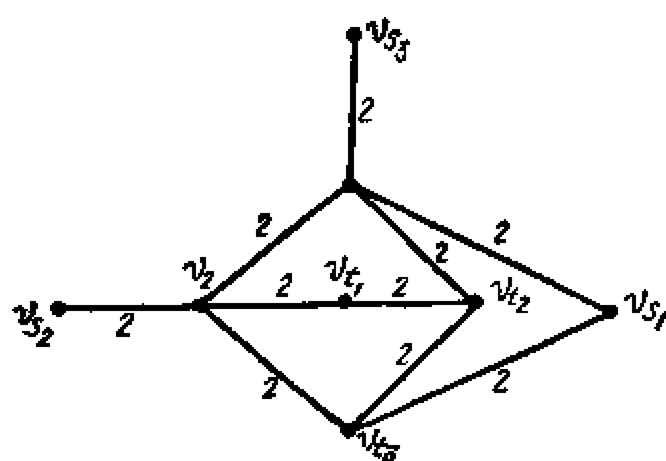


图5—10 有缝图

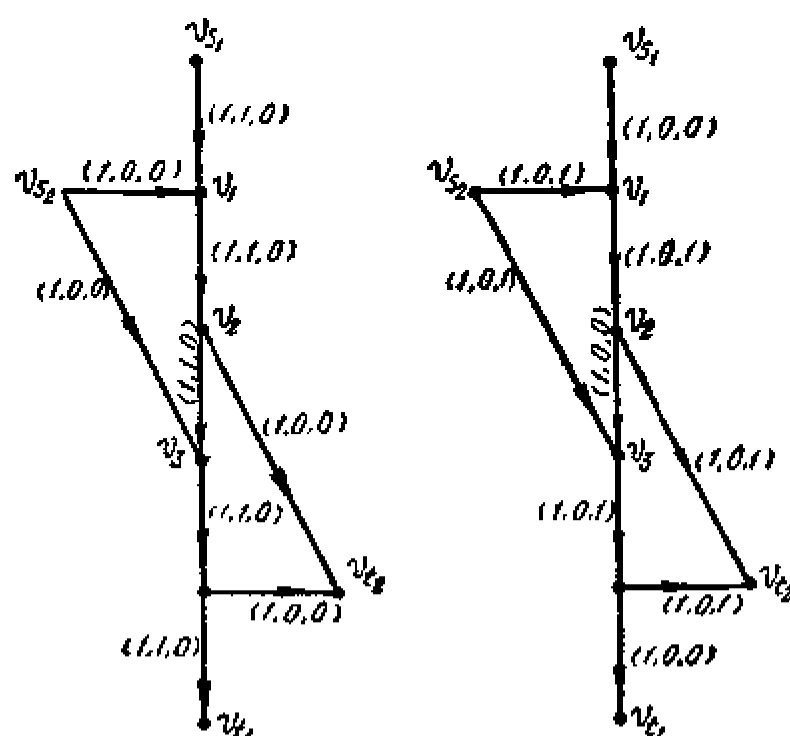


图5—11 $r_1=r_2=1$不能同时实现的流

2. 即使每一个r_l，$l=1,2,\cdots,k$都可以分别实现，而且$\sum_{l=1}^{k} f_{s_l,t_l}^{(l)} \geqslant \sum_{l=1}^{k} r_l$时，也不能保证诸$r_1,r_2,\cdots,r_k$能同时实现。为了说明这一点，请看图5—11。

弧旁括号内的三个数，第一个表示容量，第二个第三个分别表示第一、二种货物的流量。从上图易见$r_1=r_2=1$都可以单独地实现，而且$r_1+r_2=2\leqslant\max[f_{s_1,t_1}^{(1)}+f_{s_2,t_2}^{(2)}]$；因为（$b$）图里的流的值为$2(=0+2, r_1=0, r_2=2)$。然而$r_1=r_2=1$确实不能同时实现。因为图（$a$）已显示清楚：当$r_1=1$时，弧$(v_1,v_2)$和$(v_3,v_4)$均已饱和，而且取$L=\{v_1, v_3\}$时，$(L,\overline{L})$已把从$v_{s_1}$，$v_{s_2}$到它们收点的一切路都已切断，故$(L,\overline{L})$为一$s_1,s_2;t_1,t_2$的割集。因此再也不可能增加任一非零型流。

二、多种货物流的上界

定义5.11：将v_{s_l}到v_{t_l}，$l=1,2,\cdots,k$，的一切路（有向或无向）都能切断的线的集合叫作多种收、发点间的**分离集**，记为$A_{s_1,\cdots,s_k;\ t_1,\cdots,t_k}$。当图有向时称$A_{s_1,\cdots,s_k;\ t_1,\cdots,t_k}$为**有向分离集**。并令$\tau_{s_1,\cdots,s_k;\ t_1,\cdots,t_k}=\min C\ (A_{s_1,s_2,\cdots s_k;\ t_1,\cdots,t_k})$ 其中min是对一切$s_1,\cdots,s_k;\ t_1,\cdots,t_k$分离集取的，称$\tau_{s_1,\cdots,s_k;\ t_1,\cdots,t_k}$为多种货物流的极小截。

与性质5.1完全类似地有以下性质。

性质5.2：在k对收、发点v_{s_l}，v_{t_l}，（$l=1,2,\cdots k$）中的任意q对收、发点$v_{s_{a_l}}$和$V_{t_{a_l}}$（$l=1,2,\cdots,q$）恒有

$$\sum_{l=1}^{q} f_{s_{a_l},t_{a_l}}^{(a_l)} \leqslant \tau_{s_{a_1},\cdots,s_{a_q};\ t_{a_1},\cdots,t_{a_q}}$$

例5.4：当$k=3$，$q=1$时，性质5.2说明

$$f_{s_1,t_1}^{(1)} \leqslant \tau_{s_1,t_1}$$
$$f_{s_2,t_2}^{(2)} \leqslant \tau_{s_2,t_2}$$
$$f_{s_3,t_3}^{(3)} \leqslant \tau_{s_3,t_3}$$

而当$q=2$时
$$f^{(1)}_{s_1,t_1}+f^{(2)}_{s_2,t_2}\leqslant\tau_{s_1,s_2;\ t_1,t_2}$$
$$f^{(2)}_{s_2,t_2}+f^{(3)}_{s_3,t_3}\leqslant\tau_{s_2,s_3;\ t_2,t_3}$$
$$f^{(1)}_{s_1,t_1}+f^{(3)}_{s_3,t_3}\leqslant\tau_{s_1,s_3;\ t_1,t_3}$$

当$q=3$时
$$f^{(1)}_{s_1,t_1}+f^{(2)}_{s_2,t_2}+f^{(3)}_{s_3,t_3}\leqslant\tau_{s_1,s_2,s_3;\ t_1,t_2,t_3}$$

定义5.12：若网上各线的容量均为整数，则称此网为**整数网**。特别当容量均为偶整数时简称为**偶数网**。同样，当各线上的流均为整数时，称此流为**整数流**。特别当我们在解货物流问题时，所得流为整数流时，称此解为**整数解**。

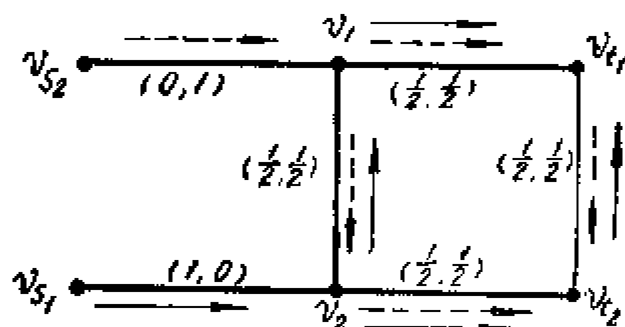


图5—12　无缝图上的非整数解

对于单一货物流，在整数网上的解都是整数解。然而这一结论对多种货物流却不成立。为此我们给出以下特例（见图5—12），在图中各边的容量全都设为1，我们用实线矢表示第一种货流，虚线表示第二种。括号内第一个数字表示第一种货物的流量，第二个数字表示第二种货流。此网是无缝的，因为$(s_2,1)$和$(s_1,2)$这两个弧构成最小分离集：

$$C(s_2,1)+C(s_1,2)=\tau_{s_1,s_2;\ t_1,t_2}=2$$

而且
$$f^{(1)}_{s_1,t_1}+f^{(2)}_{s_2,t_2}=1+1=2$$

然而在这个网上，对两种货物的极大流问题，没有整数解。因为当第一种货物保持整数流时，它从v_{s_1}到达v_{t_1}时的路径必包含第二种货物的一个饱和割集A_{s_2,t_2}。从而不可能有整数解。

对于无向网性质(5.2)右端集的上界$\tau_{s_1,\cdots,s_k;\ t_1,\cdots,t_k}$可以由适当的关联集$\omega(A)$的容量来实现。

性质5.3：对于无向图公式（5.12）等价于对顶点的任一子集$A\subset V$，恒有

$$\sum_{\substack{v_{s_l}\in A\\ v_{t_l}\overline{\in}A}} f^{(l)}_{s_l,t_l}\leqslant C(A,\overline{A}) \tag{5.13}$$

证明：因为只要$v_{s_{a_l}}\in A$，$v_{t_{a_l}}\overline{\in}A$，$(l=1,2,\cdots,q,)$则$\tau_{s_{a_1},\cdots,s_{a_q};t_{a_1},\cdots,t_{a_q}}\leqslant C(A,\overline{A})$。从而由公式(5,12)可以导出公式(5.13)。

今设公式(5.13)对V的任一子集A成立，不失一般性，往证

$$\sum_{l=1}^{q} f^{(l)}_{s_l,t_l}\leqslant\tau_{s_1,\cdots,s_q;\ t_1,\cdots,t_q}$$

设$\tau_{s_1,\cdots,s_q;\ t_1,\cdots,t_q}=C\ (A_{s_1,\cdots,s_q;\ t_1,\cdots,t_q})$。若将此分离集$A_{s_1,\cdots,s_q;\ t_1,\cdots,t_q}$从G中取出后得$\alpha$个分支$G_1=(V_1,E_1),\cdots,G_\alpha=(V_\alpha,E_\alpha)$。并设关联边族$\omega(V_i)$在原图G中恰将$S_{a_j}-t_{a_j}$，$j=1,2,\cdots p_i$路都切断了，则由公式(5.13)得

$$\sum_{j=1}^{p_i} f_{s_{a_j}, t_{a_j}}^{(a_j)} \leqslant C(V_i, \overline{V}_i)$$

须知第a_j对收、发点间的路恰被两个关联边族$\omega(V_i)$切断。所以

$$2\sum_{i=1}^{q} f_{s_i, t_i}^{(i)} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{p_i} f_{s_{a_j}, t_{a_j}}^{(a_j)} \leqslant \sum_{i=1}^{a} C(V_i, \overline{V}_i) = 2\tau_{s_1, \cdots, s_q;\ t_1, \cdots, t_q}$$

上式最左与最右显示出公式（5.12）成立。于是性质5.3得证。

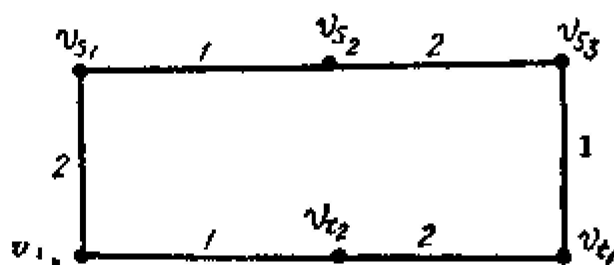


图 5—13 关联集确定的上界

为了说明性质5.3的意义，我们给出以下例子。

例5.5：在图 5—13中，$f_{s_1, t_1}^{(1)} + f_{s_2, t_2}^{(2)} + f_{s_3, t_3}^{(3)} \leqslant C[s_1, s_2] + C[s_3, t_1] + C[t_2, t_3] = 3$ （F）

虽然$[s_1, s_2]$, $[s_3, t_1]$和$[t_2, t_3]$不组成关联边族，但上列结果可以由关联边族得到：

$$f_{s_1, t_1}^{(1)} + f_{s_2, t_2}^{(2)} \leqslant C[(v_{t_1}, v_{t_2}), \overline{(v_{t_1}, v_{t_2})}] = 2$$

$$f_{s_2, t_2}^{(2)} + f_{s_3, t_3}^{(3)} \leqslant C[(v_{s_2}, v_{s_3}), \overline{(v_{s_2}, v_{s_3})}] = 2$$

$$f_{s_1, t_1}^{(1)} + f_{s_3, t_3}^{(3)} \leqslant C[(v_{s_1}, v_{t_3}), \overline{(v_{s_1}, v_{t_3})}] = 2$$

从而得公式（F）

对于两种货物流，可以将此结果改进为：$\tau_{s_1, s_2;\ t_1, t_2}$本身为一关联边族的容量。为了证明这一点，我们首先指出以下显然的结论。

性质5.4：在网中除去k对收、发点的最小分离集之后，余下的图至多有$k+1$个分支。

定理5.3：对于无向图中的两种货物流恒有

$$\tau_{s_1, s_2;\ t_1, t_2} = \min\{\tau_{s_1-s_2;\ t_1-t_2},\ \tau_{s_1-t_2;\ s_2-t_1}\}$$

其中$\tau_{s_1-s_2;\ t_1-t_2}$表示将v_{s_1}与v_{s_2}重合、v_{t_1}与v_{t_2}重合后的最小割集容量。同理$\tau_{s_1-t_2;\ s_2-t_1}$表示将v_{s_1}与v_{t_2}重合、v_{s_2}与v_{t_1}重合后的相应值。

证明：由性质5.4知两种货物流的最小分离集取消后至多有三个分支。此三个分支的可能情况如图 5—14所示。$G_i = (V_i, E_i)$ $(i=1,2,3)$表示取出分离集之后的三个分支。在所有情况下均有

$$\tau_{s_1, s_2;\ t_1, t_2} = C[V_1, \overline{V}_1]$$

对于（a）、（b）和（c）三种情况

$$C[V_1, \overline{V}_1] = \tau_{s_1-s_2;\ t_1-t_2} \leqslant \tau_{s_1-t_2;\ s_2-t_1}$$

注意在情况（a）和（b）中$\omega[V_2, V_3]$为空集；同理在情况（d），（e）和（f）中

$$C[V_1,\overline{V}_1]=\tau_{s_1-t_2;s_2-t_1}\leqslant\tau_{s_1-t_2;t_1-t_2}$$

由最后两个式得证

$$\tau_{s_1,s_2;t_1,t_2}=\min\{\tau_{s_1-s_2;t_1-t_2},\tau_{s_1-t_2;s_2-t_1}\}$$

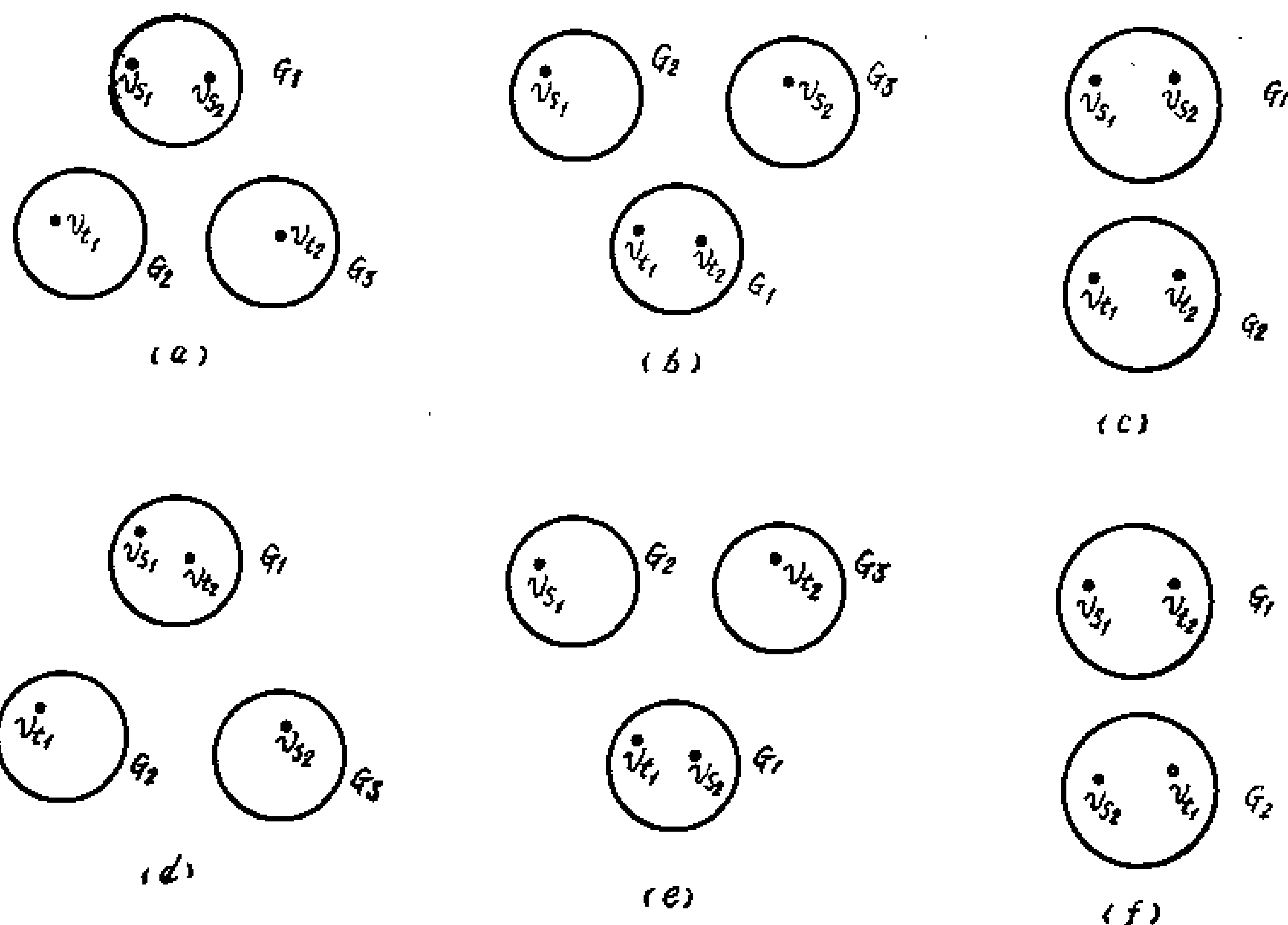


图5—14 v_{s_1}, v_{s_2}, v_{t_1}, v_{t_2} 的可能分布

三、两种货物流的极大化方法

我们在本章第一节的例5.1中，已给出了两种货物流极大化的方法。现在将这些方法从理论上使之系统化，并给出必要的论证。

定义5.13：一条 s_2-t_2 链$C_{s_2-t_2}$上的各边$[i,j]$，满足下列条件时称$C_{s_2-t_2}$为**可行的**(注意$[v_i,v_j]$是$C_{s_2-t_2}$的向前边)：

1. 有第一种货物的正的向后流：$f^{(1)}[j,i]>0$ 或
2. 有第二种货物的正的向后流：$f^{(2)}[j,i]>0$ 或
3. $C[i,j]-|f^{(1)}[i,j]|-|f^{(2)}[i,j]|>0$。

定义5.14：一条t_2-s_2链$C_{t_2-s_2}$上的各边$[i,j]$满足下列条件时称$C_{t_2-s_2}$为**可行的**(注意$[v_i,v_j]$是$C_{t_2-s_2}$的向前边)：

1. 有第一种货物的正的向后流：$f^{(1)}[j,i]>0$，或
2. 有第二种货物的正的向前流：$f^{(2)}[i,j]>0$，或
3. $C[i,j]-|f^{(1)}[i,j]|-|f^{(2)}[i,j]|>0$。

定义5.15：我们称同时存在的**可行链**$C_{s_2-t_2}$及$C_{t_2-s_2}$为一个**可行链对**，记为$C_{s_2-t_2-s_2}$。

在本章第一节对例5.2的分析中，已经看到这样的事实：两种货物流的极大化，关键是

找可行链对，而后沿每一可行链增加两种货物流（增值为各链残容量之半），为此我们再给出以下定义。

定义5.16：对于s_2-t_2可行链的边$[i,j]$令

$$\alpha[i,j]=\begin{cases}\frac{1}{2}(C[i,j]-f^{(1)}[i,j]-f^{(2)}[i,j]) & 若f^{(1)}[i,j]和f^{(2)}[i,j]为非负向前流，\\ \max\{f^{(1)}[j,i],\ f^{(2)}[j,i]\} & 否则\end{cases}$$

对于t_2-s_2可行链上的边$[i,j]$令

$$\alpha[i,j]=\begin{cases}\frac{1}{2}(C[i,j]-f^{(1)}[i,j]-f^{(2)}[j,i] & 若f^{(1)}[i,j]为非负向前流；f^{(2)}[j,i]为非负向后流\\ \max\{f^{(1)}[j,i],f^{(2)}[j,i]\} & 否则\end{cases}$$

对于可行链对$C_{s_2-t_2-s_2}$令

$$\alpha(C_{s_2-t_2-s_2})=\min\{\alpha[i,j]:[i,j]\in C_{s_2-t_2}\cup C_{t_2-s_2}\}$$

在不致引起误解时，将$\alpha(C_{s_2-t_2-s_2})$简记为α。

我们再回过头来审查例5.2,在图5—3中s_2-t_2可行链$C_{s_2-t_2}$上，$\alpha[s_2,3]=1$，$\alpha[3,4]=2$，$\alpha[4,7]=1$，$\alpha[7,8]=2$，$\alpha[8,t_2]=1$。在t_2-s_2可行链$C_{t_2-s_2}$上，$\alpha[t_2,5]=1$，$\alpha[5,4]=2$，$\alpha[4,7]=1$，$\alpha[7,6]=2$，$\alpha[6.3]=2$，$\alpha[3,s_2]=1$。所以$\alpha(C_{s_2-t_2-s_2})=1$。

下面我们给出实现r_1和r_2的要求，或者将$f^{(1)}_{s_1,t_1}+f^{(2)}_{s_2,t_2}$极大化的方法。

两种货物流的增值法

第一步：给出一个使$f^{(1)}_{s_1,t_1}=r_1$（或者使$f^{(1)}_{s_1,t_1}$极大化）的偶整数流，若r_1不可能实现则停止；

第二步：将网上各边$[i,j]$的容量改为$C'[i,j]=C[i,j]-|f[i,j]^{(1)}|$之后，找一个使$f^{(2)}_{s_2,t_2}$为极大的偶整数流，若$f^{(2)}_{s_2,t_2}\geqslant r_2$则停止；

第三步：标定一个可行链对$C_{s_2-t_2-s_2}$，若找不到则停止。若找到$C_{s_2-t_2-s_2}$，则沿$C_{s_2-t_2}$将第一种货物增加α单位，沿$C_{t_2-s_2}$也将第一种货物增加α单位；

第四步：从v_{s_2}沿$C_{s_2-t_2}$的正方向和$C_{t_2-s_2}$的反方向，在各边上都将第二种货物增加α单位；从而将$f^{(2)}_{s_2,t_2}$增加2α单位的流量；

第五步：重复第二、三、四步，直到此法停止。

两种货物流的极大化原理

引理5.1：在两种货物流的增值法中，第一到第四步每重复一次，所得的流仍为可行的（虽然只用第一、第二和第三步之后可能是不可行的）。

证明：将四个步骤使用完毕之后，在每个顶点上的流都是守恒的，故只需证明流的相容性。在第一、二两步完成之后，绝不会破坏相容性，今考虑边$[i,j]$上的流，并假设在前次施行第三、四两步之后$[i,j]$上的流为$f^{(1)}[i,j]$和$f^{(2)}[i,j]$,且满足相容性：

$$|f^{(1)}[i,j]|+|f^{(2)}[i,j]|\leqslant C[i,j]$$

现在依照$[i,j]$上流的实际状态，需要考虑三种情况：

甲、设$[i,j]$只在一个可行链上，并设$f^{(1)}[i,j]$是一个正的向后流。则在第三步之后第一种货物的新流量为

$$|f^{(1)}[i,j]|-a$$

而在第四步之后，第二种货物的新流量为（见例5.2）

$$|f^{(2)}[i,j]|+a \quad 或 \quad |f^{(2)}[i,j]|-a$$

所以在完成第一到四步之后，$[i,j]$上的新流量至多为

$$(|f^{(1)}[i,j]|-a)+(|f^{(2)}[i,j]|+a)=|f^{(1)}[i,j]|+|f^{(2)}[i,j]|\leqslant C[i,j]$$

于是当出现情形甲时，引理得证。

乙、还设$[i,j]$仅在一条可行链上，但假设$f^{(1)}[i,j]$为非负向前流。则在完成第三步之后，第一种货物流的大小为

$$|f^{(1)}[i,j]|+a$$

在完成第四步之后，第二种货物流的大小为

$$|f^{(2)}[i,j]|-a \quad 或 \quad |f^{(2)}[i,j]|+a$$

在前一种场合，$[i,j]$上流的值满足条件

$$(|f^{(1)}[i,j]|+a)+(|f^{(2)}[i,j]|-a)=|f^{(1)}[i,j]|+|f^{(2)}[i,j]|\leqslant C[i,j]$$

在后一种场合，$[i,j]$上流的值满足条件

$$|f^{(1)}[i,j]|+|f^{(2)}[i,j]|+2a=C[i,j]$$

因为此时$a=(C[i,j]-|f^{(1)}[i,j]|-|f^{(2)}[i,j]|)/2$

所以若情形乙出现时，引理也成立。

丙、设$[i,j]$同时在两个可行链上。当$[i,j]$在两条链上同向时，$|f^{(1)}[i,j]|$增加$2a$，但$|f^{(2)}[i,j]|$不变；而当$[i,j]$对两条可行链异向时，$|f^{(1)}[i,j]|$不变，但$|f^{(2)}[i,j]|$要增加$2a$。总之，在$[i,j]$上的新流量为

$$|f^{(1)}[i,j]|+|f^{(2)}[i,j]|+2a=C[i,j]$$

于是在任何情况下，引理5.1都成立

引理5.2：若对所有的i和j，r_1、r_2和$C[i,j]$都是偶整数，则两种货物的增值法产生整数流（若我们的目的是将$f^{(1)}_{s_1,t_1}+f^{(2)}_{s_2,t_2}$极大化，则仅需$C[i,j]$为整数即可，但所得的解一般不能保证为整数，见例5.2）。

证明：设r_1、r_2和$C[i,j]$均为偶整数。再者在第一、二两步中，对于所有的i和j我们要求$f^{(1)}[i,j]$和$f^{(2)}[i,j]$全是偶整数。所以第一、二两步之后，所有的流全是偶整数而a为整数。

今设以前所得的a均为整数，证明再用一次第三、四两步后，a仍为整数。由引理5.1的证明中，已经看到在完成第三、四两步之后，或者是$|f^{(1)}[i,j]|+|f^{(2)}[i,j]|$的值不变，或者是它的值改变了$2a$。所以在每一步骤上，不论是第一种货物还是第二种，它的值或者不变或者改变a单位。这表明在使用增值法的全过程中，流始终为整数的。

引理5.3：若对一切i和j，$C[i,j]$和r_1、r_2都是偶整数，则两种货物流的增值法必在有限步之后停止（若我们的目的是将$f^{(1)}_{s_1,t_1}+f^{(2)}_{s_2,t_2}$极大化，则仅需要$C[i,j]$为整数）。

证明：因为在第一步之后，偶整数值$f^{(1)}_{s_1,t_1}$在全过程中总是保持不变的。而引理5.2显示出：每重复一次第二、三和四步之后，$f^{(2)}_{s_2,t_2}$的值就要增加一个偶整数。所以在有限步骤之后，或者r_1和r_2实现了；或者$f^{(1)}_{s_1,t_1}+f^{(2)}_{s_2,t_2}$已达极大值$\tau_{s_1,s_2;t_1,t_2}$，于是引理得证。

引理5.4：对于偶整数r_1、r_2和$C[i,j]$，两种货物的增值法且仅当下列三个条件(a)、

（b）或（c）成立时停止：

（a）r_1和r_2得以实现；

（b）$f^{(1)}_{s_1,t_1}+f^{(2)}_{s_2,t_2}$已极大化；

（c）或者r_1，或者r_2；或者是r_1+r_2不可能实现。

证明：引理 5.3 已经证明了此方法重复有限次之后，必停止在第一、二或三步。若r_1和r_2都实现之后，此法显然在第二步停止；若将$f^{(1)}_{s_1,t_1}+f^{(2)}_{s_2,t_2}$极大化，则在第三步停止；若$r_1$不能实现，则在第一步停止；若$r_1+r_2$不能实现，则在第三步停止。以下证明在增值法停止时，仅能处于上述各情形，即方法停止时，（a）、（b）或（c）成立。

情形甲：若方法在第一步之后停止，由极大流极小截定理得知r_1不能实现，所以（c）成立。

情形乙：若方法在第二步之后停止，则r_1和r_2都已实现，故（a）成立。

情形丙：若方法在第三步之后停止，则$C_{s_2-t_2}$或$C_{t_2-s_2}$中至少有一条（可行链）找不到。为确切计，设$C_{s_2-t_2}$不存在，并按下列方法递归地定义一个顶点集A：

1°：取$v_{s_2}\in$ A。

2°：若$v_j\in$ A，则当下列条件之一成立时，令$v_k\in$ A：

（1）$f^{(1)}[k,j]$是一个从v_k到v_j的正流；

（2）$f^{(2)}[k,j]$是一个从v_k到v_j的正流；

（3）$C[j,k]-|f^{(1)}[j,k]|-|f^{(2)}[j,k]|>0$。

由A的构造及可行链$C_{s_2-t_2}$的定义可知$v_{t_2}\in\overline{A}$，从而关联边族$\omega(A)=(A,\overline{A})$非空，若$[i,j]\in[A,\overline{A}]$，则同时有下列三个关系式

$$C[i,j]-|f^{(1)}_{[i,j]}|-|f^{(2)}_{[i,j]}|=0$$

$$f^{(1)}[i,j]\geqslant 0$$

$$f^{(2)}[i,j]\geqslant 0$$

若在一切$[i,j]\in[A,\overline{A}]$上恒有$f^{(1)}[i,j]=0$，则$C[A,\overline{A}]=f^{(2)}[A,\overline{A}]$。又因$v_{s_2}\in A$，$v_{t_2}\in\overline{A}$，故$f^{(2)}_{s_2,t_2}$已极大化。且$f^{(1)}_{s_1,t_1}+f^{(2)}_{s_2,t_2}$也已极大化，或者$r_1+r_2$是不能实现的。

倘若存在$[i,j]\in[\overline{A},A]$，且$f^{(1)}[i,j]$为从v_i到v_j的正流，则必然是$v_{s_1}\in A$，$v_{t_1}\in\overline{A}$。否则就应有这样的一条边$[l,k]\in[A,\overline{A}]$，使$f^{(1)}[k,l]>0$，此与$v_k\in\overline{A}$矛盾。所以我们得知$v_{s_1},v_{s_2},\in A$，$v_{t_1},v_{t_2}\in\overline{A}$，且$r_1+r_2\geqslant C[A,\overline{A}]\geqslant\tau_{s_1,s_2;t_1,t_2}$。这表明或者$r_1+r_2$不能实现，或者$f^{(1)}_{s_1,t_1}+f^{(2)}_{s_2,t_2}$已极大化。

同理可证若不存在可行链$C_{t_2-s_2}$时，也有同样的结论。

总之，当方法在第三步之后停止时，（b）或（c）成立。于是引理5.4得证。

在引理 5.4 的证明中，同时显示出应如何确定可行链对的具体方法。由这些引理我们得到多种货物流理论的中心定理。

定理 5.4：在无向偶整数网上

a）需求量r_1和r_2可以实现的充分必要条件是

$$r_1 \leqslant \tau_{s_1, t_1} \quad (1)$$

$$r_2 \leqslant \tau_{s_2, t_2} \quad (2)$$

$$r_1 + r_2 \leqslant \tau_{s_1, s_2; t_1, t_2} \quad (3)$$

b）$f^{(1)}_{s_1, t_1} + f^{(2)}_{s_2, t_2}$ 的极大值为$\tau_{s_1, s_2; t_1, t_2}$

在这个定理的a）部分必要性中，(1)及(2)式已见于性质5.1，式(3)已见于性质5.2。

由"两种货物流的增值方法"可知当(1)、(2)及(3)三式成立时，在偶整数网上r_1和r_2是可以实现的。

在b）部分，由引理5.4情形内的证明中已知

$$\max\{f^{(1)}_{s_1, t_1} + f^{(2)}_{s_2, t_2}\} = \tau_{s_1, s_2; t_1, t_2}$$

定理中$C[i, j]$对一切$[i, j] \in E$为偶的这一条件，对保证解的整数性、无缝性是必要的。这一点已在图5—12中早有说明：即当网不是偶整数的时候，不能同时保证既有整数解又能极大化。然而，仅仅为了保持整数解或仅要求极大化，并不要求网为偶整数。

第四节　共收点的多种货物流

在这一节里，讨论有向网上多个发点$v_{s_1}, \cdots, v_{s_N}$但只有单一收点V_t的多种货物流，假设每一个发点只供应单一种货物。今设有非负常数列$a_1 > a_2 > \cdots > a_N$，我们主要讨论使

$$\sum_{i=1}^{N} a_i f^{(i)}_{s_i, t}$$

极大化的方法。显然这是一个有多种用途的目标函数。

共收点的多种货物流方法

第一步：添设一新的总发点v_s；

第二步：从$i = 1$开始，逐步添设容量为无限大的弧(s, s_i)；

第三步：将所有的流视为单一种货物，用标号法极大化s-t流；

第四步：若$i < N$，以$i + 1$代i返回到第二步，若$i = N$则进入第五步；

第五步：将流进行有效路径的分解，若路型流用到(s, s_i)弧，则指定此流为第i种货物。

定理5.5：由共收点的多种货物流方法所得到的流，使目标函数

$$\sum_{i=1}^{N} a_i f^{(i)}_{s_i, t}$$

达到极大值。

证明：定义

$$f_k = \sum_{i=1}^{k} f^{(i)}_{s_i, t}$$

$$C_k=\sum_{i=1}^{k}a_i f_{s_i,t}^{(i)}$$

并用$\overline{f}_k$和$\overline{C}_k$分别表示上列两个和的最大值。在重复施行第三步的过程中，依 $k=1,2,\cdots,N$的次序使f_k获得极大值。所以

$$g_{s_k,t}^{(k)}=\overline{f}_k-\overline{f}_{k-1}\qquad k=2,3,\cdots,N \tag{1}$$

其中 $g_{s_k,t}^{(k)}$ 表示用上列方法所得的值。当 $k=1$时

$$g_{s_1,t}^{(1)}=\overline{f}_1 \tag{2}$$

以下我们对 k 用归纳法来证明上述方法使C_N极大化。对于$k=1$，由于

$$C_1=a_1 f_{s_1,t}^{(1)}$$

所以为使C_1达极大值，仅需使$f_{s_1,t}^{(1)}$极大化。于是由式（2）得知，由此方法所得的C_1之值确已极大

$$\overline{C}_1=a_1 g_{s_1,t}^{(1)} \tag{3}$$

因此当 $k=1$时结论成立。今假设对于 k，由上列方法所得的C_k之值为极大：

$$\overline{C}_k=\sum_{i=1}^{k}a_i g_{s_i,t}^{(i)} \tag{4}$$

往证

$$\overline{C}_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}a_i g_{s_i,t}^{(i)} \tag{5}$$

由于

$$\sum_{i=1}^{k+1}a_i g_{s_i,t}^{(i)}=\sum_{i=1}^{k}a_i g_{s_i,t}^{(i)}+a_{k+1}g_{s_{k+1},t}^{(k+1)} \tag{6}$$

将（4）及（1）式代入（6）式右端得

$$\sum_{i=1}^{k+1}a_i g_{s_i,t}^{(i)}=\overline{C}_k+a_{k+1}\overline{f}_{k+1}-a_{k+1}\overline{f}_k \tag{7}$$

为了证明式（5），只需证明 $f_{s_{k+1},t}^{(k+1)}$不论是大于还是小于按上述方法所得到的第 $k+1$个流的值 $g_{s_{k+1},t}^{(k+1)}$，C_{k+1}之值都要小于式（5）的右端。

倘若 $f_{s_{k+1},t}^{(k+1)}<g_{s_{k+1},t}^{(k+1)}$，由于归纳假设及$a_{k+1}$的非负性得

$$C_{k+1}=\overline{C}_k+a_{k+1}f_{s_{k+1},t}^{(k+1)}<\sum_{i=1}^{k+1}a_i g_{s_i,t}^{(i)} \tag{8}$$

倘若 $f_{s_{k+1},t}^{(k+1)}>g_{s_{k+1},t}^{(k+1)}$，即

$$f_{s_{k+1},t}^{(k+1)}=\overline{f}_{k+1}-\overline{f}_k+\beta,\qquad \beta>0 \tag{9}$$

由定义$f_k=f_{k+1}-f_{s_{k+1},t}^{(k+1)}$及上式（9）得

$$f_k=(f_{k+1}-\overline{f}_{k+1})+\overline{f}_k-\beta \tag{10}$$

但因$f_{k+1} \leqslant \overline{f}_{k+1}$故由式（10）得

$$f_k \leqslant \overline{f}_k - \beta \tag{11}$$

作为一个中间步骤，我们用式（11）对C_k往证成立相应的关系式

$$C_k \leqslant \overline{C}_k - \alpha_k \beta \tag{12}$$

倘若有$C_k > \overline{C}_k - \alpha_k \beta$，由式（11）知，可将$f_k$增加$\beta$。从而至少可以把$C_k$的值增加$\alpha_k \beta$（因为$j < k$时，$\alpha_j > \alpha_k$）。所以$C_k$的新值就应该大于$\overline{C}_k$。这个矛盾说明了式（12）是成立的。

由于
$$C_{k+1} = C_k + \alpha_{k+1} f_{s_{k+1},t}^{(k+1)},$$

再由式（12）得
$$C_{k+1} \leqslant \overline{C}_k + \alpha_{k+1} f_{s_{k+1},t}^{(k+1)} - \alpha_k \beta \tag{13}$$

将式（9）代入式（13）得

$$C_{k+1} \leqslant [\overline{C}_k + \alpha_{k+1} \overline{f}_{k+1} - \alpha_{k+1} \overline{f}_k] - (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \beta \tag{14}$$

将式（7）与式（14）对比，并注意$\alpha_k > \alpha_{k+1}$，可得

$$C_{k+1} < \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i g_{s_i,t}^{(i)} \tag{15}$$

由式（8）和式（15）就证明式（5）在任何情况下的正确性。于是对于一切自然数N，由上列方法所得之$g_{s_i,t}^{(i)}$使$C_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_{s_i,t}^{(i)}$极大化

$$\overline{C}_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_{s_i,t}^{(i)}$$

例5.6：考虑有向网图5—15有三个发点v_{s_1}、v_{s_2}和v_{s_3}，一个共同收点v_t。让我们来审查在它上边极大化目标函数的方法。假设用此方法首次迭代之后，沿v_{s_1}，v_a，v_b，v_c，v_e，v_t路径有一个单位的流。第二次迭代之后，沿v_{s_2}，v_a，v_b，v_d，v_c，v_e，v_t和v_{s_2}，v_b，v_c，v_e，v_t两条路径都有一个单位的流。最后一次迭代后沿v_{s_3}，v_e，v_t路径送一个单位的流。然后用流的路径分解方法很容易辨认各条路径上的货物。需注意，只有到最后一步才能去分辨各种货物流。一般来说，按一定的顺序使各个流分别极大化，是不能使目标函数极大化。最后当某些系数$\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \cdots = \alpha_{i_k}$相等时，这个方法仍有效，这只要把相应的货物视为同一种即可。一俟方法完成之后，再用路型的分解方法来辨认各个流。

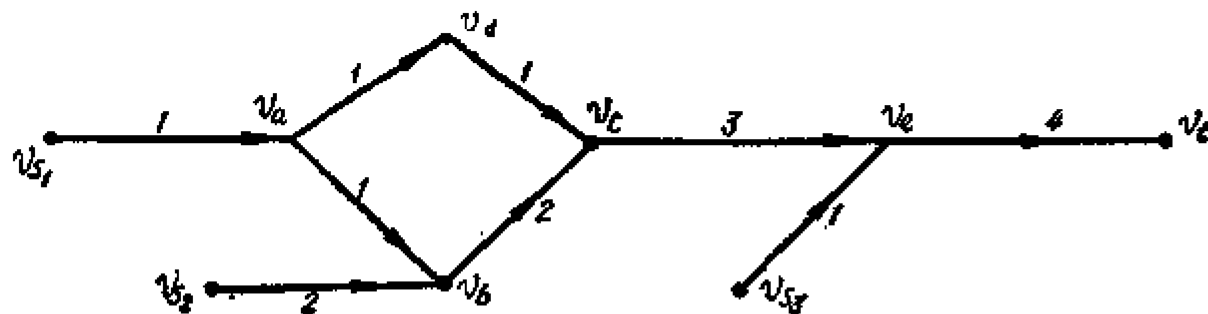


图5—15 共收点的多种货物方法

关于极大流问题的证明是多种多样的。由Elias、（易拉斯）Feinstein（弗恩斯坦）和Shannon（熵楠）所给证明，不需要假设容量是整数或有理数。它给出了一个巧妙的方法，用以支解一个图为几个很简单的子图，对这些子图很容易看出它们的解，又能很容易的

由这些子图拼出原图上的解。由 Dantzig（坦梯兹）和 Fulkeison（富柯松）所给证明，是首先把极大流问题化为线性规划的问题，而后引用线性规划的对偶定理来解。

习　题

1. 试证性质5.1〔提示：对任一$X\subset V$，$v_s\in X$，恒有$f_{s,t}=f(X,V)-f(V,X)$〕。

2. 在图5—16中用标号法使$f_{s,t}$极大化。求$\tau_{s,t}$的值，并找一个基本割集$A_{s,t}$使$C(A_{s,t})=\tau_{s,t}$。图5—16中弧上的数字为容量。

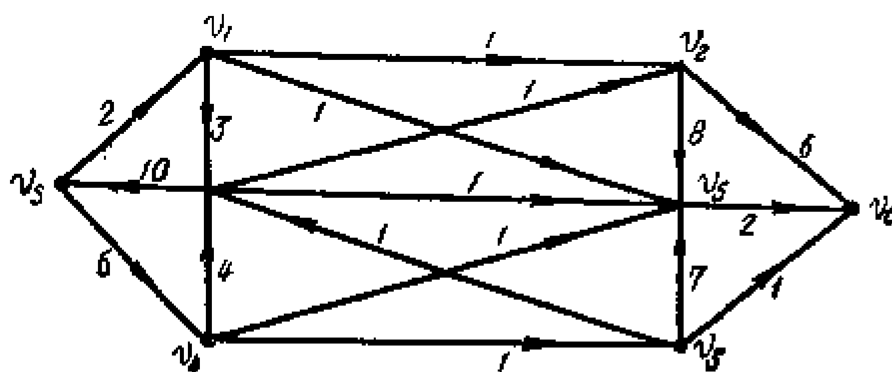


图5—16　极大流、极小截

3. 有张、王、李、赵四人和j_1、j_2、j_3和j_4四项工作，张善于担任j_1、j_2和j_3三项工作；王能担负j_1和j_2两项；李能担任j_2和j_3两项；赵仅能作j_4。今假设在同一时间每人仅能作一项工作，问四人同时各担任一项工作的所有可能方案。试把此问题化为极大流问题。

4. 试证当初始流及网均为偶整数时，用标号法产生偶整数流。

5. 设$G=(V,\Gamma)$为有向1-图，且其上有一个满足以下条件的流：

（1）在各点上满足守恒性方程；

（2）$f(i,j)\geq l(i,j)$，对一切v_i和一切$v_j\in\Gamma(v_i)$成立。

其中$l(i,j)$为一非负整数。

（1）用标号方法找出极小s-t流的值$f_{s,t}$；

（2）试证

$$\min_{\mathscr{F}}\{f_{s,t}\}=\max_{A}[C(A,\overline{A})],\qquad v_t\in A,\ v_s\in\overline{A}$$

6. 设$G=(V,U)$为一个整数传输网，$S=\{v_{s_1},\cdots,v_{s_q}\}$，$T=\{v_{t_1},\cdots,v_{t_h}\}$为顶点的两个子集。我们希望判别在下列条件下T集的整数需求量$r_1,\cdots r_h$能否由S集提供的整数供应量$a_1,\cdots a_q$来满足，这些限制性的条件是：

$$\sum_{l} f_{s_k,t_l}\leq a_k\qquad k=1,2,\cdots,q;$$

$$\sum_{k} f_{s_k,t_l}\geq r_l\qquad l=1,2,\cdots h;$$

$$\sum_{k} a_k\geq\sum r_l$$

$$f(i,j)\leq C(i,j)\qquad 对一切(i,j)成立,$$

$$f(i,V)-f(V,i)=\begin{cases}\sum_{l} f_{s_k,t_l} & 若i=s_k\\ 0 & 若i\neq s_k,t_l\\ -\sum_{k} f_{s_k,t_l} & 若i=t_l\end{cases}$$

这就是所谓的“运输问题”。当$a_k=1$，$r_l=1$时，就是所谓的“分配问题”。习题3就是一个分配问题，这在管理科学上是极为有用的。

（1）将上列问题归结为具有一对收、发点的网上极大流问题。

（2）试证存在满足上列条件的流的充分必要条件是对于T的每一个子集T_q、任一割集$C(A,\overline{A})$和S的任一子集S_q总有

$$\sum_{v_j\in(T_q\cap\overline{A})} r_j-\sum_{v_k\in(S_q\cap A)} a_k\leq C(A,\overline{A})$$

7. 在无向网（图5—17）上，在边旁所注的数字为它的容量，矢上所注的数字为第一种货物流。用两种货物流的方法，在调整第一种货物流之后确定一个$\mathscr{F}^2$，使

$$f^{(1)}_{s_1,t_1}=2$$

并使

$$f^{(2)}_{s_2,t_2}\text{为最大。}$$

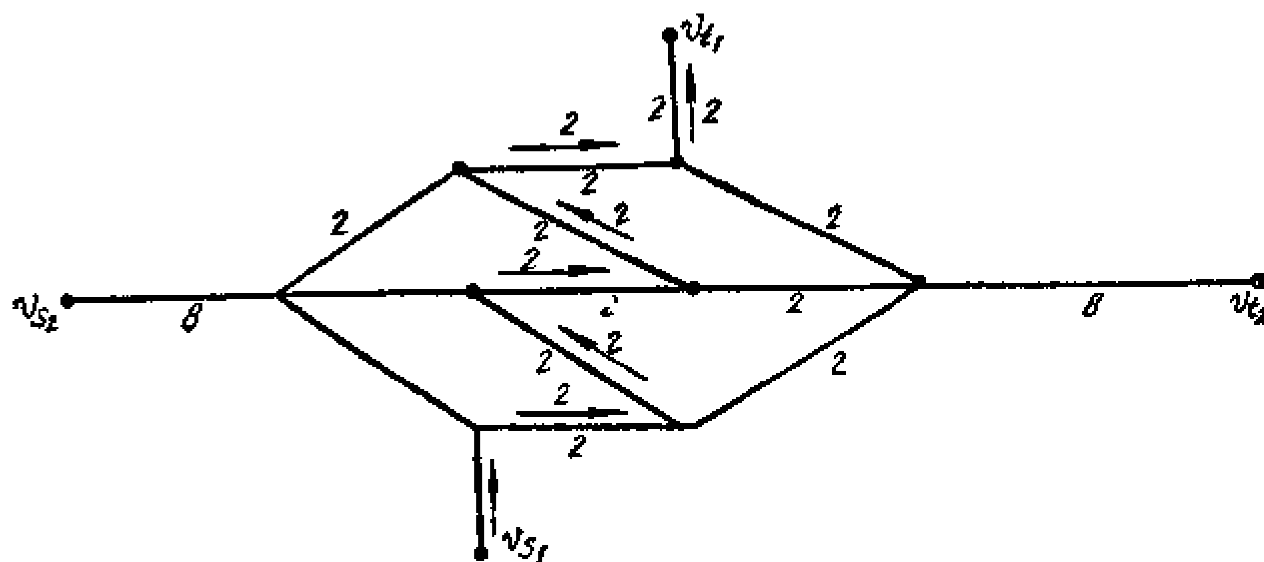


图5—17 两种货物流的调整

8. 试完成引理5.4中不存在可行链$C_{t_2\cdots s_2}$情形的证明。

9. 在有向网（图5—18）中，各弧上的数字为容量，v_{s_i}为第$i(i=1,2,3)$种货物的发点，v_t为一切货物的收点。试确定一个流$\mathscr{F}$使

$$\beta=f_{s_1,t}+2f_{s_2,t}+3f_{s_3,t}$$

为极大。

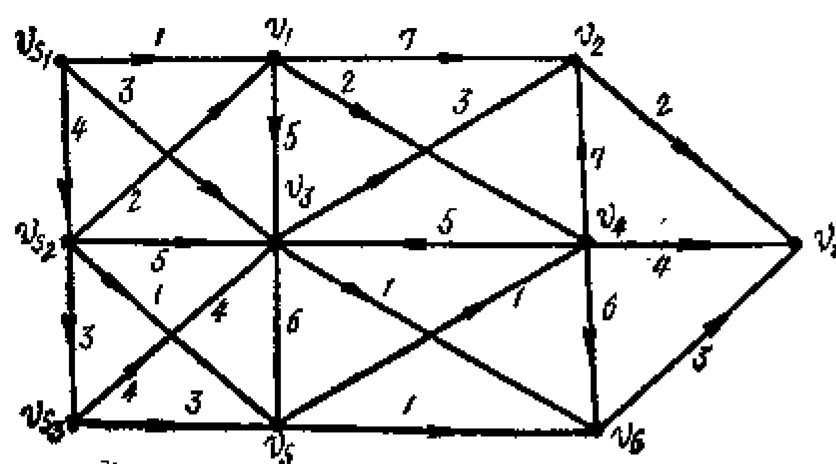


图5—18 目标函数的极大化

第六章　随机网上的极大流

第一节　引　　言

在上一章所讨论的极大流，是在确定性网上运行的，即各线和它们的容量及流都是一个确定的实体或数值。然而在很多情况下，不论是设备本身还是流都不是确定的，即设备随着时间的推移而以某种概率分布提供使用；流也是按某种概率分布配置在网上。若仍以$\tau_{s,t}$表示随机网中v_s与v_t二顶点间的极小$s-t$割集的容量；$r_{s,t}$为由v_s到v_t的需求量，则我们要讨论的问题是求以下概率

$$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\} \tag{6.1}$$

或对于临界概率水准p_0，研究下列式子是否成立。

$$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}\geqslant p_0 \tag{6.2}$$

当网本身与流都是随机的情况下，$\tau_{s,t}$和$r_{s,t}$当然都是随机变数。特别当$\tau_{s,t}$和$r_{s,t}$以概率1取值$\tau^0_{s,t}$及$r^0_{s,t}$时（且各种分布均为退化的时候），那么这就是确定性问题。因此，随机网上的极大流实为确定性流的推广。再者我们在这里提出的问题，对于$\tau_{s,t}$及$r_{s,t}$之一，即容量和流之一为确定性、另一为随机性的时候也是存在的。

在随机网上另外的一些问题里，最为突出而重要的就是排队问题。这是由于从v_s到v_t待传输的“货物”，需要排队等待“服务”而造成的问题。在v_s和v_t间流量为$r_{s,t}$的货物在指定的时间有时不可能全部到达目的地，即可使一部分货物到达目的地，而将另一部分存储在网的中间某些顶点上，待空闲出足够的容量再来完成全部运输。对于这样的传输系统，大量的问题是要研究在图上运行的货物所需要耗费的时间长度，我们不准备讨论它们。关于网上的排队问题读者也可以参考张里千同志译的“公用事业理论的数学方法”一书。本节所提出的问题（6.1）和排队论问题的关系，可以由下列说明中得到启示：概率$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}$就是从$v_s$到$v_t$运送$r_{s,t}$单位的货物无需在中间点上储存的概率。

分析问题的任何方法都与随机流的统计信息密切相关。这一章将对随机变量的统计性质作几种不同的假设，并在这些前提下，对上列的一些问题进行研究。所得到的结果对于有向或无向图都同样适用。

在第二节里将对统计的基本概念作简短介绍。在第三节里假设容量和流的理论分布都是未知的，当获得$\tau_{s,t}$的一个样本之后，我们来讨论关于$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}$的大小的假设之检验问题。在第四节里假设随机流的概率分布是已知的，我们来研究$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}$的计算问题。在第五节里假设随机流是正态分布的条件下，我们来研究一些特定的也是常遇到的情况。在第六节我们使用Monte-carlo（蒙特-卡罗）技术来计算$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}$的数值。从而知道它是渐近正态分布的。最后在第七节里我们用统计方法来研究极大流的正态渐近性质。在那里我们假设极大流为渐近正态分布，而后给出假设的检定方法。

第二节　基本假设检定

一、参数假设之检定

考虑由随机矢量$X=(X_1,\cdots,X_k)$所刻画的系统，当系统的数学表达式为$X=(X_1,\cdots,X_k)$时，由于X的随机性，故对体系不可能作精确的预言。若是X的概率分布为已知，则可以对体系的性能作出定量的估计。例如X_1表示货车的载重量；X_2表示该列车的时速；X_3表示其机车类别：电力、内燃或是蒸汽；X_4表示轨道坡度等等，则$X=(X_1,X_2,X_3,X_4)$为一个四维随机矢量，并作为货车的数学模型。倘若知道了每一个边界$X_i(i=1,2,3,4)$的分布，则可以在检定之前预言有百分之多少的列车速度在每小时30～35公里之间，或者一列货车在它全部旅行时间中有百分之多少以30～35公里的时速前进。对其它边界也有同样的问题。另外，当诸X_i的联合分布为已知时，则可对检定结果作全面预言。例如当$X=(X_1,X_2,X_3,X_4)$的分布已知时，就可以预言载重量为2700吨、时速为30公里、在8‰的坡道上，用内燃机车牵引着的货车，最可能的列数是多少（这里假设分布为离散的）。

对各边界X_i经常是不完全知道它的分布，我们这里假设X_i分布的类型是已知的，但其中某些参数是未知的，所以我们要讨论的假设之检定是指参数估计而言。例如已知X_1为一维正态$N(a,\sigma)$分布，这里就有两个参数a和σ．即X_1的均值a和标准差σ是待估或待检定的：

$$EX_1=a,$$
$$E(X_1-a)^2=\sigma^2$$

为此，就要取一个足够大的、有充分代表性的样本。并求出所需各阶矩的估计量，而后出作某种指标的结论。

我们要讨论的统计问题可以概括如下：设有随机矢量X，仅知其概率分布为分布族$\mathscr{P}=\{P_\theta;\theta\in\Theta\}$中的一元，其中矢参量为$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_l)\in\Theta$，于是需要进行统计检定以便确定$\theta$的真值。例如对于一维正态分布的随机变数$X$，其概率密度为：

$$P_\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_1}}e^{-\frac{(x-\theta_2)^2}{2\theta_1}}$$

其中$\theta_1=\sigma^2$，$\theta_2=a$，$\theta=(\theta_1,\theta_2)$为未知参数。对于参数之假设检定将按参数之范围分为简单假设或复杂假设两种。

定义6.1：若$\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1,\Theta_0\cap\Theta_1=\phi$，称$\theta\in\Theta_0$为假设$H_0$成立，而当$\theta\overline{\in}\Theta_0$即当$\theta\in\Theta_1$时称为$H_1$成立。从而当我们要由样本判定是

$$H_0:\ \theta\in\Theta_0$$

还是

$$H_1:\ \theta\in\Theta_1$$

时，称此检定为：**针对其它假设H_1的H_0检定。**

任何检定的结果都依赖于如何从母体X中取样。令X_i为随机矢量X的第i个观测结果所对应的随机矢量；显然一个良好的抽样方式应使X与$X_i,i=1,2,\cdots,k$具有相同的概率分布。所以我们要求：(1)$X_1,X_2,\cdots,X_k$与X同分布；(2)每一个X_i要包含尽可能多的信息，从而要求(3)$X_1,X_2,\cdots,X_k$互相独立。

例如我们要对有100件的一批产品进行抽样检查，倘若是不带放回的（即受检产品不再放回去接受可能的检查），则每次观测后母体各不相同，即$X_1,\cdots,X_k$不为同分布。反之，

若每检查完一件产品后把它放回，与未检查过的产品同等看待，这种方法称为“带放回”的。此时$X_1, X_2, \cdots, X_k$为同一母体。若每次检定均与以前各次结果无关，则$X_1, \cdots, X_k$又可进一步视为互独立的随机矢量。

二、两种错误、评价检定之准则

在抽得有限个样本的基础上，我们要对假设H_0的真伪作出判决时，可能犯两种错误：

Ⅰ、弃真的错误：当H_0确实成立时，即$\theta \in \Theta_0$时，我们却抛弃或者说否定了H_0，即结论为$\theta \in \Theta_1$。也常把这种错误叫作第一种错误。其概率叫作**“弃真概率”**：

$$P\{\text{弃真}\} = P\{\text{第一种错误}\} = P\{\text{抛弃}H_0 | H_0\text{成立}\}$$

Ⅱ、纳伪的错误：当H_0确实不成立时，即$\theta \in \Theta_1$时，我们却接受了这个假设H_0，其结论为$\theta \in \Theta_0$。也常把这种错误叫作第二种的。其概率叫作**“纳伪概率”**：

$$P\{\text{纳伪}\} = P\{\text{第二种错误}\} = P\{\text{采纳}H_0 | H_0\text{不成立}\}$$

一个理想的检定似应使以上两种概率全是零，但这是不可能的（除非随机变数是退化的，这时属于确定性问题）。一般地说，合理的提法是确定这样一种检定：在保证一种错误的概率不超过指定的、足够小的常数α的情况下，使另一种错误尽可能地小。于是对任意指定的$\alpha > 0$，总有这样的检定使：

$$P\{\text{弃真}\} \leqslant \alpha \tag{6.3a}$$

又使

$$P\{\text{纳伪}\}\text{极小化。} \tag{6.3b}$$

需要指出的是只要求纳伪概率达极小值，并不能由此而结论说$\min P\{\text{纳伪}\}$是个接近于0的数，实际上此最小值接近于1的情况也是有的。

假设检定理论的基本结果是Nayman-pearson(奈曼-皮尔逊)引理。这个结果指出若$\Theta_0 = \{\theta_0\}$，$\Theta_1 = \{\theta_1\}$各只有单一元时，满足（6.3）式的检定必存在，且由下列公式可以得到：

若

$$P_{\theta_1}(x) > \widehat{K} P_{\theta_0}(x) \tag{6.4a}$$

则抛弃H_0；

若

$$P_{\theta_1}(x) < \widehat{K} P_{\theta_0}(x) \tag{6.4b}$$

则肯定H_0。其中$P_{\theta_0}(x)$是当$\theta = \theta_0$时，由样本点X所得到的随机变数X的概率密度；$P_{\theta_1}(x)$是当$\theta = \theta_1$时，由样本点X所得到的随机变数X的概率密度。$\widehat{K}$由下式决定（具体解法见例6.1）：

$$P\{\text{抛弃}H_0 | H_0\text{成立}\} = \int_{(P_{\theta_1}(x) > \widehat{K} P_{\theta_0}(x))} P_{\theta_0}(x)\,dx = \alpha \tag{6.4c}$$

这样安排的检定叫作**α水平的最大功效检定**。当我们从（6.4c）中把$\widehat{K}$定出来之后，则

$$P_{\theta_1}(x) = \widehat{K} P_{\theta_0}(x) \tag{6.4d}$$

在k维耙空间确定一个域D。当（6.4d）发生时，抛弃H_0的概率应取为

$$\gamma = \int_D P_{\theta_1}(x)\,dx$$

但若随机矢量X为连续型时，则（6.4d）出现的概率为0，从而在实际上可以认为是

不会出现的情况。

例6.1：设X为正态随机变数，均值为θ方差为1。若假设H_0为$\theta=0$，针对假设H_1为$\theta=1$。设$X_1,\cdots,X_k$是与X有相同概率分布的独立随机变数，且$X_i, i=1,2,\cdots,k$为第i个样本的随机结果（即独立实验的第i次重复）。令x_i为X_i的特定值，$X=(x_1,\cdots,x_k)$：

$$P_{\theta_0}(x)=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_i-0)^2/1}$$

$$P_{\theta_1}(x)=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_i-1)^2/1}$$

按Neyman-pearson引理，具有（6.3）所列条件的统计检定当

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_i-1)^2}>\hat{K}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x_i^2}$$

时抛弃H_0。将上式化简得

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{k}(x_i-1)^2-x_i^2\right]\right)>\hat{K}$$

再化简得

$$\sum_{i=1}^{k}x_i>\frac{1}{2}k+\ln\hat{K}$$

令$K^*=\frac{1}{2}k+\ln\hat{K}$，则Neyman-pearson引理给出下列检定准则：

若

$$\sum_{i=1}^{k}x_i>K^* \tag{6.5a}$$

则抛弃H_0；

若
$$\sum_{i=1}^{k}x_i<K^* \tag{6.5b}$$

则肯定H_0。由(6.4d)，上式中的K^*应由以下方程定出：

$$\int_D P_{\theta=0}(x)\,dx=\alpha \tag{6.5c}$$

其中D为（$x_1,\cdots,x_k$）构成的k维空间中，由

$$\sum_{i=1}^{k}x_i>K^*$$

所定义的区域，$dx=dx_1\cdot dx_2\cdots dx_k$。由（6.5$c$）求解$K^*$一般是很繁杂的。然而对于互独立同分布的$X_1,\cdots,X_k$来说，这个问题却十分简单易行。因为在这种条件下，独立和

$$\sum_{i=1}^{k}X_i$$

也是正态分布的，其均值及方差分别为0和k，因为$\theta=0$，故（6.5c）左端之积分可写为

$$\int_{K^*}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}e^{-\frac{1}{2k}u^2}du$$

从而K^*可以从正态变数表中由方程

$$\int_{K^*}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}e^{-\frac{1}{2k}u^2}du=\alpha$$

中查出。

假设之检定理论的主要结果为Neyman-pearson引理，当Θ_0及Θ_1均只含有一个元素时，称为**简单假设之检定**，否则称为复杂的。我们首先讨论简单的假设之检定。

第三节 容量分析

设G=(V,U)为一个(n,m)图，在弧$u_i(i=1,2,\cdots,n)$上的容量为c_i；f_i为u_i上的现有流，则弧u_i上再能附加的流显然是c_i-f_i。用G*表示与G有同样结构而容量为$d_i=c_i-f_i$的网。所以在G网上找v_s与v_t间的极大流，等价于在G*网上找极大$s-t$流。今把$f_1,f_2,\cdots,f_m$作为随机流$F_1,F_2,\cdots,F_m$在G网上的具体实现，则G*上具有随机容量

$$d_1=c_1-f_1,\quad d_2=c_2-f_2,\cdots,\quad d_m=c_m-f_m$$

为方便计定义列矢量如下：

$$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\},\quad F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\},\quad D=\{d_1,d_2,\cdots,d_m\},$$

从而$D=C-F$。

一、割集矩阵的性质、与树的结合形式

我们在定义2.23中介绍了圈矩阵和最小$s-t$割集矩阵。并在定理3.2中证明了圈空间和余圈空间的正交性，在定理3.6中证明了它们的秩分别为

$$\nu(G)=m-n+\rho$$

$$\lambda(G)=n-\rho$$

定理3.10指出图中的每一个弧，如不属一棵特定的树，则必属于它的余树。在定理3.7中，给出利用平面图的有限围道构造基本圈的方法。为了对图进行较深入的分析研究，并使所涉及的理论更为直观，我们首先给出定义

定义6.2：设G=(V,L)为一个(n,m)连接图，H=(V,T)为G的一个延伸子树，则称T中的线$l\in$T为**枝**，称L中不属于T的线$l\in$L-T为**弦**。若G有ρ个分支$G_i=(V_i,L_i)i=1,2,\cdots\rho$，$H_i=(V_i,T_i)$为$G_i$的延伸子树。则称$T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_\rho$中的线为G的枝，L中不为枝的线叫弦。

由定理3.3中所述树的特征及上述有关定理可知如下各性质：

性质6.1：对于每一条弦l与树（或森林）H上的枝结合得唯一的一个圈$c(l)$；若弦$l_1\neq l_2$则所得结合圈$c(l_1)\neq c(l_2)$。

由于G的延伸森林的枝数$n_b=n-\rho$和弦数$n_c=m-n+\rho$，从而弦与树H的所有结合圈构成一组圈基：$\{c(l_1),\cdots,c(l_{n_c})\}$

性质6.2：在连接图G中，对于每一个枝$b\in$T，从G的延伸树H=(V,T)中去掉b之后，将H断为两个分支$H_1=(V_b^1,T_1)$及$H_2=(V_b^2,T_2)$，称$\omega_b=(V_b^1,V_b^2)$是以枝b为标志的G的

余圈。易见$\omega_b=(V_b^1,V_b^2)$中除b之外均为弦，由$b_1\neq b_2$可以推知$(V_{b_1}^1,V_{b_1}^2)\neq(V_{b_2}^1,V_{b_2}^2)$，即$\omega_{b_1}\neq\omega_{b_2}$，从而枝与弦的结合余圈构成一组余圈基：$\{\omega_{b_1},\omega_{b_2},\cdots,\omega_{b_{n_b}}\}$

定义6.3：设$H=\{V,T\}$为连接图$G=(V,L)$的延伸树，$\{l_1,l_2,\cdots,l_{n_c}\}$为G关于H的弦的集合；$\{b_1,b_2,\cdots,b_{n_b}\}$为G关于树H的枝的集合，称下列矩阵$\mathbf{B}_f$为G关于H的基本圈矩阵；$\mathbf{S}_f$为G的关于H的基本余圈矩阵：

$$
\begin{array}{c}
\quad\quad l_1\ l_2\cdots l_{n_c}\quad\quad\quad b_1\quad b_2\cdots b_{n_b}\\
B_f=\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & \cdots 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1n_b}\\
0 & 1 & \cdots 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2n_b}\\
 & \ddots & & \vdots & \ddots & \\
0 & 0 & \cdots 1 & b_{n_c1} & b_{n_c2} & \cdots b_{n_cn_b}
\end{array}\right)\begin{array}{l}c_1\\c_2\\ \vdots\\c_{n_c}\end{array}=(U_{11}\ B_{f_{12}})
\end{array}
$$

$$
S_f=\left(\begin{array}{ccc|ccc}
l_{11} & l_{12} & \cdots l_{1n_c} & 1 & 0 & \cdots 0\\
l_{21} & l_{22} & \cdots l_{2n_c} & 0 & 1 & \cdots 0\\
 & \ddots & & \vdots & \ddots & \\
l_{n_b1} & l_{n_b2} & \cdots l_{n_bn_c} & 0 & 0 & \cdots 1
\end{array}\right)\begin{array}{l}s_1\\s_2\\ \vdots\\s_{n_b}\end{array}=(S_{f_{11}}\ U_{12})
$$

注意U_{11}表示n_c阶的一个单位方阵；U_{12}表示n_b阶的单位方阵。

性质6.3：对于圈空间C(G)的任意一组圈矢量

$$C_i'=(l_{i1}',l_{i2}',\cdots l_{in_c}',\ b_{i1}',\cdots,b_{in_b}'),\qquad i=1,2,\cdots n_c$$

所构成的圈矩阵$C=\{c_1',c_2',\cdots,c_{n_c}'\}$，恒有$n_c$阶方阵D使

$$C=D\cdot B_f$$

特别当C为由圈空间C(G)的一组基底构成的圈矩阵时，D为非特异的。

由于以枝b为标志的余圈ω_b都是基本余圈，也都是基本割集，从而有下列性质。

性质6.4：对于G的任意割集

$$S_i'=(l_{i1}'',\cdots,l_{in_c}'',b_{i1}'',\cdots,b_{in_b}''),\qquad i=1,2,\cdots,n_b$$

所构成的割集矩阵$S=\{s_1',s_2',\cdots,s_{n_b}'\}$，恒有$n_b$阶方阵D使

$$S=DS_f$$

特别当S为由n_b个关联边族所构成的关联矩阵R时，D为非特异的。

性质6.5：由定理3.2可知

$$B_f\cdot S_f'=0$$

$$S_f\cdot B_f'=0$$

将图中v_s与v_t分离的割集矩阵S_{s-t}的秩和它的行矢量的一组基，也可以利用在图G中选择适当的树得到。我们应当选取这样的树，使其中含有从v_s到v_t的一条最长的链$\max C_{s-t}$(一般不是唯一的)。则以这棵树中位于$\max C_{s-t}$上的枝为标志的割集，构成S_{s-t}的行的线性无关的最大子集。从而S_{s-t}的秩为$\max C_{s-t}$的长度（即其上的枝数）。

例6.2试写出图6－1的S_{s-t}割集矩阵，并指出它的行矢的一组基底。

图中显示的$\max C_{s-t}$有四个枝（e_1, e_2, e_3, e_4）。以此四枝为标志的四个s-t割集依次列在S_{s-t}的前四行。注意：由于$n-\rho=5-1=4$，所以这四个割集也是整个图G的割集矩阵S_G的基底。

$$
S_{s-t}=\begin{array}{c}
\begin{matrix} e_5 & e_6 & e_7 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| \\ l_1 & l_2 & l_3 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix} \\
\left|\begin{array}{ccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right|
\end{array}
$$

图6－1 例6.2用图

A^5_{s-t}、A^6_{s-t}及A^7_{s-t}都可表示为前四行在$\mathscr{F}=\{0,1\}$上的线性和(见第三章第一节之三)：

$$A^5_{s-t}=A^1_{s-t}+A^3_{s-t}+A^4_{s-t}$$

$$A^6_{s-t}=A^2_{s-t}+A^3_{s-t}+A^4_{s-t}$$

$$A^7_{s-t}=A^1_{s-t}+A^2_{s-t}+A^4_{s-t}$$

在S_{s-t}的右上角用点线所围起来的子阵，是一个四阶单位矩阵。当$k\geqslant5$时A^k_{s-t}用A^1_{s-t}，A^2_{s-t}，A^3_{s-t}及A^4_{s-t}的线性结合表示式中，系数规则如下：

$$A^k_{s-t}=s_{k1}A^1_{s-t}+s_{k2}A^2_{s-t}+s_{k3}A^3_{s-t}+s_{k4}A^4_{s-t}$$

其中s_{kj}为S_{s-t}的第k行、第e_j列之元，$j=1,2,3,4$。

二、随机流的假设之检定

设网G上随机流的分布是未知的，仅有它的N个样本。令$F(k)=\{f_1(k),f_2(k),\cdots,f_m(k)\}$为时刻$k$在各线$l_1,l_2,\cdots,l_m$上的观测值，$k=1,2,\cdots,N$。纵然$F(k)$的分布是未知的，我们可以假设它们是互独立同分布的。这里独立性的假设是要求取样本的时间间隔足够大。而同分布的假设是由流的平稳性来保证的。由上列记号，可得时刻k时的随机容量矢

$$D(k)=C-F(k)=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}-\{f_1(k),f_2(k),\cdots,f_m(k)\}$$

以下来讨论从v_s到v_t的极大流不小于$r_{s,t}$的概率。

由极大流极小截定理，在k时刻的极大流等于极小截的值$\tau_{s,t}(k)$。由定义

$$\tau_{s,t}(k)=\min\{C[A^1_{s-t}(k)],\cdots,C[A^q_{s-t}(k)]\}=\underset{\text{对一切行}}{\min}\{S_{s-t}\cdot D(k)\}$$

其中$S_{s-t}\cdot D(k)$表示k时刻各线的容量由$D(k)$给出时，一切s-t割集的容量所构成的列矢。我们提出下列统计命题

检定假设 $\qquad H_0$: $p=P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}\geqslant p_0 \qquad (6.6a)$

针对假设为 $\qquad H_1$: $p<p_0 \qquad (6.6b)$

置信水平为$\alpha=P\{$弃真$\}$。

因为假设$F(1),\cdots,F(N)$为互独立同分布的，故由此而产生的观测值$\tau_{s,t}(1)$，$\tau_{s,t}(2)$，

$\cdots,\tau_{s,t}(N)$也是互独立同分布的。在这里假设H_0及针对假设H_1都是复合的。我们的目的首先是引入新的简单假设H_0'及简单针对假设H_1'，使与H_0和H_1强烈相关。而后我们对于H_0'及H_1'设计一个最大功效检定。此检定的设计应能原封不动地转回对H_0及H_1的判断。

$\tau_{s,t}(k)$的分布范围为正半实轴，定义$p_+(x)$与$p_-(x)$如下：

$$p_+(x)dx = P\{x \leqslant \tau_{s,t}(k) < x+dx : \tau_{s,t} \geqslant r_{s,t}\}$$

$$p_-(x)dx = P\{x \leqslant \tau_{s,t}(k) < x+dx : \tau_{s,t} < r_{s,t}\}$$

于是$x \leqslant \tau_{s,t}(k) < x+dx$的概率可以用条件概率分布来表示：

$$P\{x \leqslant \tau_{s,t}(k) < x+dx\} = p_+(x)p\,dx + p_-(x)(1-p)dx \tag{6.7}$$

利用这些条件密度$p_+(x)$和$p_-(x)$以及样本值的独立性，可以得到满足条件

$$\tau_{s,t}(i_1),\cdots,\tau_{s,t}(i_{N1}) < r_{s,t} \leqslant \tau_{s,t}(j_1),\cdots,\tau_{s,t}(j_{N-N_1})$$

的极大流[作为多维点：$\tau_{s,t}(1),\cdots,\tau_{s,t}(N)$]的联合分布密度：

$$p^{N-N_1}\cdot(1-p)^{N_1}\cdot p_-[\tau_{s,t}(i_1)]\cdot\cdots\cdot p_-[\tau_{s,t}(i_{N1})]$$

$$\cdot p_+[\tau_{s,t}(j_1)]\cdot\cdots\cdot p_+[\tau_{s,t}(j_{N-N_1})] \tag{6.8}$$

以下讨论将复杂假设换为简单假设H_0'及H_1'的方法。我们用H_0'：$p=p_0$替代假设H_0，并用任意固定的针对假设H_1'：$p=p_1$。设$\tau_{s,t}$在假设H_0'之下的密度记为(p_0,p_+,p_-)，在假设H_1'之下的密度记为(p_1,p_+,p_-)。此处要求参数p_1为小于p_0的正的概率。在这些条件之下，需检定的统计假设

H_0'：$\tau_{s,t}$的密度为(p_0,p_+,p_-)，

针对假设　　H_1'：$\tau_{s,t}$的密度为(p_1,p_+,p_-)

这样就可以利用Neyman-pearson针对简单假设的简单假设检定方法。

按照Neyman-pearson引理，我们作比值：

$$\frac{(p_1,p_+,p_-)}{(p_0,p_+,p_-)} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{N-N_1}\cdot\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{N_1}$$

于是针对H_1'的α水平的、H_0'的最大功效检定是这样的：

若
$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{N-N_1}\cdot\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{N_1} > \hat{K} \tag{6.9}$$

则抛弃假设H_0'；

若
$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{N-N_1}\cdot\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{N_1} = \hat{K} \tag{6.10}$$

则以概率γ抛弃假设H_0'；

若
$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{N-N_1}\cdot\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{N_1} < \hat{K} \tag{6.11}$$

则接受假设H_0'。其中$\hat{K}$和γ这两个常数由下式确定

$$P\left\{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{N-N_1}\cdot\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{N_1} > \hat{K}\right\} + \gamma P\left\{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{N-N_1}\cdot\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{N_1} = \hat{K}\right\} = \alpha \tag{6.12}$$

此处的概率P是当$p=p_0$时的测度，α是第一种错误即弃真的指定概率。N_1为N个观测值中$\tau_{s,t} < r_{s,t}$的个数，故为一随机变数。

须知上列检定也可以用另外的形式来表示，我们在式（6.9）中取对数则有：

$$(N-N_1)\ln\frac{p_1}{p_0} + \left[\ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)\right]N_1 > \ln\hat{K}$$

化简得 $$N_1\left[\ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)+\ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)\right]>\ln\hat{K}+N\ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)=K'$$

由于$p_0>p_1$，从而上式左端N_1的系数为正，故

$$N_1>\frac{K'}{\ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)+\ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)}=K^*$$

故得检定的等价形式：

若 $$N_1>K^* \tag{6.13}$$

则抛弃假设H_0'，

若 $$N_1=K^* \tag{6.14}$$

则依概率γ抛弃H_0'

若 $$N_1<K^* \tag{6.15}$$

则接受H_0'，其中K^*与γ由下式决定：

$$P\{N_1>K^*\}+\gamma P\{N_1=K^*\}=\alpha \tag{6.16}$$

此处之概率为假设$p=p_0$时的测度。

为了由（6.16）在假设$p=p_0$成立时确定出K^*和γ，只须注意N_1是具有参数$1-p_0$和N的二项分布，并不依赖于p的真值。故K^*和γ由二项分布表中就可以得到。

定义6.4：若检定的安排对复合针对假设的一切值而言，能使纳伪（即第二种错误）的概率达到极小，则称此检定为**一致最大功效检定**。

由于检定式（6.13）～(6.15)与针对假设H_1'无关，故它不仅是对于$p=p_0$和$p=p_1<p_0$的最大功效检定，而且也是对于针对$p<p_0$的假设$p=p_0$的一致最大功效检定。

今假设参数p的真值$p=p_2>p_0$，第一种错误的概率仍要小于α。因为检定的此种错误是p的减函数，而且在原来的假设H_0：$p\geqslant p_0$之下，此函数在p_0取极大值。这是检定假设H_0：$p\geqslant p_0$(针对假设H_1：$p<p_0$)为一致最大功效的一个充分条件。

于是我们得到了检定假设"在网中可以得到至少$r_{s,t}$单位的流的概率不小于p_0"的统计检定：

这个检定从实际背景上说是很自然的。它要求在统计样本中核查流小于$r_{s,t}$的次数，若此数"过大"，则显示p_0不是客观概率的真实估计量。所谓"过大"一词，由检定的性质可以确切规定（$N_1>K^*$）。此检定很简单而便于应用，它在纳伪概率为极小的意义下此检定是最佳的。为了说明检定的应用给出例6.3。

例6.3：设G为一个网，它的容量是常数，而各线上的流是随机的。我们要确定在顶点v_s与v_t间的单位流是否能有80%到达。若容量为整数，就要找出至少有一条未饱和的s-t路的概率。假设线上随机流的概率分布是未知的或仅有过去的流的记录可用，那么可以用统计方法检定$P\{r_{s,t}\geqslant 1\}\geqslant 0.8$是否成立。倘若在决定中发生了弃真的错误（即概率本来是够大的，但判断它是小的），那么就要对系统作大规模修改。反之，倘若在决定中发生了纳伪的错误，则对体系不作任何改动。从这一角度看，必须控制弃真错误的概率，故检定应该是：在α水平上，设$\alpha=0.1$，针对假设

$$H_1:\qquad p<0.8$$

检定假设

$$\mathrm{H}_0: \qquad p=\mathrm{P}\{\tau_{s,t}\geqslant 1\}\geqslant 0.8$$

于是最好的检定是由式（6.13）～(6.15）给出的，因此需要找出K^*和γ。

$$令 N_1=X_1+X_2+\cdots+X_N,$$

其中

$$X_i=\begin{cases}0 & 若\tau_{s,t}(i)\geqslant 1,\\ 1 & 若\tau_{s,t}(i)<1。\end{cases}$$

显然，对于每一个 i，$\mathrm{P}\{X_i=0\}=p$，$\mathrm{P}\{X_i=1\}=1-p$，所以N_1是以$1-p$和N为参数的二项分布变元。故

$$\mathrm{P}\{N_1>K^*\}=\sum_{k=K^*+1}^{N}\mathrm{C}_k^N(1-p)^k p^{N-k}$$

$$\mathrm{P}\{N_1=K^*\}=C_{K^*}^N(1-p)^{K^*}p^{N-K^*}$$

我们还需要找出满足下列条件的K^*和γ：

当$p=0.8$时

$$\sum_{k=K^*+1}^{N}\mathrm{C}_k^N(1-p)^k p^{N-k}+\gamma\mathrm{C}_{K^*}^N(1-p)^{K^*}p^{N-K^*}=0.1$$

为解此方程，须标出样本的大小N。设$N=25$，利用普阿松渐近二项分布可解最后这个方程。

换言之，令

$$\mathrm{P}\{N_1=k\}=\frac{[25(1-0.8)]^k}{k!}e^{-25(1-0.8)}=\frac{5^k}{k!}e^{-5}$$

由普阿松变数的标准表，可得

$$\mathrm{P}\{N_1\geqslant 7\}=0.14$$

$$\mathrm{P}\{N_1\geqslant 8\}=0.07$$

所以$K^*=7$。再解下列方程，可以得到γ的值：

$$0.07+\gamma\mathrm{P}\{N_1=7\}=0.1$$

由于$\mathrm{P}\{N_1=7\}=\mathrm{P}\{N_1\geqslant 7\}-\mathrm{P}\{N_1\geqslant 8\}=0.07$，从而得$\gamma=0.43$。于是，0.1水平的一致最大功效检定为：

抛弃H_0，如果$N_1>7$；

如果$N_1=7$抛弃H_0的概率为0.43；

接受H_0，如果$N_1<7$。

应当指出，虽然使第二种错误出现的概率为极小，然而这个概率可能仍然是大的。此概率的大小，为样本大小N和参数的真值p两个变元的函数，它是当N增大和p变小时而减小。若发生第二种错误的代价，比发生第一种错误时小，则应作出对偶统计检定问题：

针对

$$\mathrm{H}_1: \quad p>p_0$$

检定

$$\mathrm{H}_0: \quad p\leqslant p_0$$

对偶问题解的细则与所讨论的检定类似。

第四节　任意分布的极大流的概率计算

一、随机网上的计算问题

设G为一个（n，m）图，与以前一样，设在每一线l_i上有一个随机流F_i。并设F_i为一个非负连续随机变数，它的概率密度p_i^*（f_i）是未知的。于是

$$P\{F_i \geqslant x\} = 1 - \int_0^x p_i^*(y)dy \tag{6.17}$$

在G的每一线上随机容量$d_i = c_i - F_i$，设d_i的概率密度函数是$p_i(x_i)$。已知p_i^*时，可以由下列方程计算出$p_i(x)$：

$$p_i(x) = p_i^*(c_i - x),\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{6.18}$$

于是，在线l_i上能够再有x_i单位的流的概率为

$$P\{d_i \geqslant x_i\} = 1 - \int_0^{x_i} p_i(y)\,dy = \int_0^{c_i - x_i} p_i^*(y)dy \tag{6.19}$$

现在我们给出一个方法，用它来求网G中由v_s到v_t可以到达的流满足条件$r_{s,t} \geqslant r_{s,t}$的概率。这个方法并不是作为实际计算的技巧而提出来的，它的意义仅在于指出概率的精确值在计算时的困难所在。

由极大流极小截定理，值为$r_{s,t}$的流在网中可达的充分必要条件是

$$\min_k\{c(A_{s,t}^k)\} \geqslant r_{s,t} \tag{6.20}$$

此处$c(A_{s,t}^k)$为割集$A_{s,t}^k$的容量之值。由于容量的值是随机变数，故$c(A_{s,t}^k)$与$\min_k\{c(A_{s,t}^k)\}$都是随机变数。我们的问题是计算

$$P\{\min_k[c(A_{s,t}^k)] \geqslant r_{s,t}\} = P\{c(A_{s,t}^1) \geqslant r_{s,t}, c(A_{s,t}^2) \geqslant r_{s,t}, \cdots, c(A_{s,t}^q) \geqslant r_{s,t}\} \tag{6.21}$$

为了求此概率，就需要知道随机变数$\min_k\{c(A_{s,t}^k)\}$的概率密度。这就是主要困难所在，我们用下列方法来解决这个密度问题。

二、随机割集矢的联合分布

设$p(a_1, a_2, \cdots a_q)$是变元$c(A_{s,t}^1), c(A_{s,t}^2), \cdots, c(A_{s,t}^q)$的联合概率密度，即

$$\begin{aligned} & p(a_1, a_2, \cdots, a_q)da_1 da_2 \cdots da_q \\ & = P\{a_1 \leqslant c(A_{s,t}^1) < a + da_1, a_2 \leqslant c(A_{s,t}^2) < a_2 + da_2, \cdots, a_q \leqslant c(A_{s,t}^q) < a_q + da_q\} \end{aligned} \tag{6.22}$$

为求$\min_k\{c(A_{s,t}^k)\}$的密度，我们首先计算$p(a_1, a_2, \cdots, a_q)$。设$A = \{c(A_{s,t}^1), c(A_{s,t}^2), \cdots, c(A_{s,t}^q)\}$为随机割集（列）矢，$a = \{a_1, a_2, \cdots, a_q\}$为A的一个特定值。令$D = \{d_1, d_2, \cdots, d_m\}$为随机容量矢，$\widetilde{D} = \{\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2, \cdots, \widetilde{d}_m\}$为D的一个特定值。当已知容量列矢$\widetilde{D}$时，我们可以按下列公式计算割集矢$a$（或A）：

$$a = S_{s-t}\widetilde{D}\ （或A = S_{s-t}D）$$

其中$S_{s-t} = [a_{ij}]$是$q \times m$的$s-t$割集矩阵。为了求出A的概率密度，必须先求随机矢量D的特征函数。设D的联合概率密度为$p(\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2, \cdots, \widetilde{d}_m)$，令$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，$d\widetilde{D} = d\widetilde{d}_1 \cdots \cdot d\widetilde{d}_m$。则D之特征函数$H(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$为：

$$H(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\exp(\sum_{i=1}^{m}\sqrt{-1}\,\alpha_i\widetilde{d}_i)\,p(\widetilde{d}_1,\widetilde{d}_2,\cdots,\widetilde{d}_m)\,d\widetilde{D}$$
$$=E\{\exp(\sqrt{-1}\,\alpha'D)\}^{*}$$
$$=H(\alpha') \tag{6.23}$$

倘若$d_1,d_2,\cdots,d_m$为互独立的随机变数，则有

$$p(\widetilde{d}_1,\widetilde{d}_2,\cdots,\widetilde{d}_m)=p_1(\widetilde{d}_1)\cdot p_2(\widetilde{d}_2)\cdot\cdots\cdot p_m(\widetilde{d}_m)$$

所以在上列假设之下，则计算上的困难由于下列表达式而得以简化：

$$H(\alpha')=H(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\prod_{k=1}^{m}E\{\exp(\sqrt{-1}\,\alpha_k\widetilde{d}_k)\} \tag{6.24}$$

用$\Psi(\beta')$来表示随机矢A的特征函数，其中$\beta=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q\}$；$\beta'=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q)$则

$$\Psi(\beta')=E\{\exp(\sqrt{-1}\,\beta'A)\}=E\{\exp(\sqrt{-1}\,\beta'\cdot S_{s-t}D)\}$$
$$=\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\exp\{(\sqrt{-1}\,\beta'S_{s-t}\widetilde{D})\}\,p(\widetilde{d}_1,\widetilde{d}_2,\cdots,\widetilde{d}_m)\,d\widetilde{D} \tag{6.25}$$

比较上式与6.23中的$H(\alpha')$的积分表达式，可知$\Psi(\beta')$由下式计算：

$$\Psi(\beta')=H(\beta'S_{s-t}) \tag{6.26}$$

当已经知道A的特征函数之后，由特征函数到分布函数的逆转公式，就可以得到A的概率密度$p(a')$。现在讨论一个简单的例子。

例6.4：由图6—2，设边e_1，e_2，e_3，e_4和e_5的容量是互独立同分布随机变数，共同分布为实直线上的闭区间$[0，c_0]$上的均匀分布：

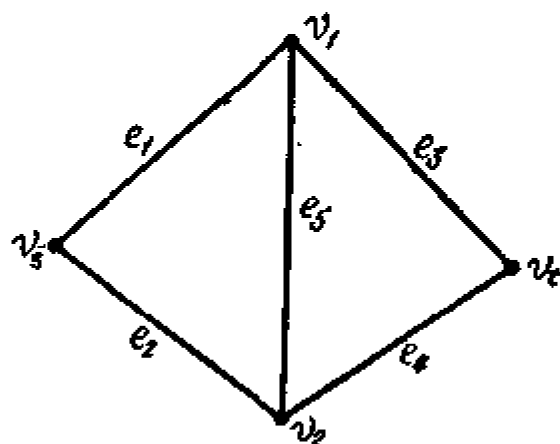


图6—2　例6.4用图

$$p_i(\widetilde{d})=\begin{cases}1/c_0 & 若\ 0\leqslant\widetilde{d}\leqslant c_0\\ 0 & 否则。\end{cases}$$

对于$c_0=1$，随机变数d_i的特征函数为

$$E\{\exp\sqrt{-1}\,\alpha_id_i\}=\int_0^1\exp(\sqrt{-1}\,\alpha_i\widetilde{d}_i)\,p_i(\widetilde{d}_i)\,d\widetilde{d}_i=\frac{1}{\alpha_i\sqrt{-1}}[\exp(\sqrt{-1}\,\alpha_i)-1]$$
$$i=1,2,\cdots,5$$

所以D的特征函数为

$$H(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\frac{1}{(\sqrt{-1})^5\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\prod_{i=1}^{5}[\exp(\sqrt{-1}\,\alpha_i)-1]$$

为了求割集的特征函数，我们须首先找$s-t$割集矩阵S_{s-t}。因为图G很小，容易看出与e_i相对应的列：

---

* 注意$\alpha'=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}'$，即“$'$”为转置符。

$$S_{s-t}=\begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

由式（6.26）令$\alpha'=\beta' S_{s-t}$，即$\alpha=S'_{s-t}\cdot\beta$或

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1+\beta_3 \\ \beta_1+\beta_4 \\ \beta_2+\beta_4 \\ \beta_2+\beta_3 \\ \beta_3+\beta_4 \end{pmatrix}$$

于是割集的特征函数为

$$\Psi(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=\frac{-1\sqrt{-1}}{(\beta_1+\beta_3)(\beta_1+\beta_4)(\beta_2+\beta_4)(\beta_2+\beta_3)(\beta_3+\beta_4)}$$
$$\cdot[\exp(\sqrt{-1}(\beta_1+\beta_3))-1]\cdot$$
$$[\exp(\sqrt{-1}(\beta_1+\beta_4))-1]\cdot[\exp(\sqrt{-1}(\beta_2+\beta_4))-1]$$
$$\cdot[\exp(\sqrt{-1}(\beta_2+\beta_3))-1]\cdot[\exp(\sqrt{-1}(\beta_3+\beta_4))-1]$$

现在已经求出了$\Psi(\beta')$，从原则上说割集的密度函数也为已知了。这是因为特征函数与分布函数或密度函数是1-1对应的。例如$p(a_1,a_2,a_3,a_4)$可由下式给出

$$p(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\exp(-\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{4}\beta_i a_i)d\beta$$

故$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}$的表达式为：

$$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}=\int_{r_{s,t}}^{\infty}\int_{r_{s,t}}^{\infty}\int_{r_{s,t}}^{\infty}\int_{r_{s,t}}^{\infty}p(a_1,a_2,a_3,a_4)da_1da_2da_3da_4$$

现在我们回到原来的问题上，即计算$P\{\min_k[c(A^k_{s,t})]\geqslant r_{s,t}\}$。因为$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}=P\{c(A^1_{s,t})\geqslant r_{s,t},c(A^2_{s,t})\geqslant r_{s,t},\cdots,c(A^q_{s,t})\geqslant r_{s,t}\}$，故可通过计算下列积分的方法来求

$$p(a_1,a_2,\cdots a_q)=\frac{1}{(2\pi)^q}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\beta')\exp(-\sqrt{-1}\beta' a)d\beta_1 d\beta_2\cdots d\beta_q \tag{6.27}$$

$$p\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}=\int_{r_{s,t}}^{\infty}\int_{r_{s,t}}^{\infty}\cdots\int_{r_{s,t}}^{\infty}p(a_1,a_2,\cdots a_q)da_1da_2\cdots da_q \tag{6.28}$$

以上二式对于我们的目的来说仍不够理想。虽然$[c(A^1_{s,t}),\cdots,c(A^q_{s,t})]$的特征函数是完全确定了的，而且由它可以唯一地确定密度函数，但相应的密度函数可能是退化的。例如，若x_1和x_2是两个随机变数且$x_2=cx_1$，$c\neq 0$，为一常数。若$x_2\neq cx_1$，则$p(x_1,x_2)=0$，若$x_2=cx_1$，则$p(x_1,x_2)=p(x_1)$。换言之，概率分布密度的全部“质量”集中在(x_1,x_2)平面的直线$x_2=cx_1$上。在一般情况下，若$x_1,\cdots,x_q$为所论随机变数，则它们联合分布的

特征函数在确定一个退化或奇异分布的充分必要条件是 $x_1, x_2, \cdots, x_q$ 以概率 1 线性相关。为了说明割集矢的特征函数可能产生奇异分布，让我们来看下列例子。

例6.5：在图 6－3 G的关于v_s和v_t的割集矩阵为：

$$S_{s-t}=\begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right] \end{array}$$

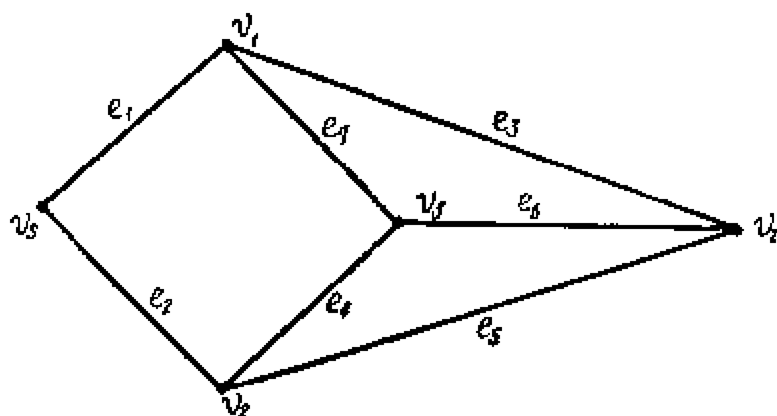


图 6－3　例6.5用图

割集$A^6_{s,t}$的值可以表示为

$$c(A^6_{s,t})=d_3+d_4+d_5+d_7=(d_1+d_4+d_5)+(d_2+d_3+d_7)-(d_1+d_2)$$

或
$$c(A^6_{s,t})=c(A^2_{s,t})+c(A^3_{s,t})-c(A^1_{s,t})$$

由于S_{s-t}中第 6 行为前三行在一般实数域上的线性结合。于是若某一$c(A^i_{s,t})$为其余割集值的线性结合，则S_{s-t}中相应的行也有线性关系。即若A为退化的概率分布时，S_{s-t}不能是满秩的，反之亦然。

设S_{s-t}的秩（在实数域上）为q'，若$q'<q$时，为了找出$c(A^1_{s,t}), c(A^2_{s,t}), \cdots, c(A^q_{s,t})$的特征函数，可以转而找$c(A^{i_1}_{s,t}), \cdots, c(A^{i_{q'}}_{s,t})$的特征函数。此处$\{c(A^{i_1}_{s,t}), \cdots, c(A^{i_{q'}}_{s,t})\}$为$c(A^1_{s,t}), \cdots, c(A^q_{s,t})$中线性独立的最大子集。于是

$$c(A^j_{s,t})=\sum_{k=1}^{q'}\xi_{j,i_k}c(A^{i_k}_{s,t})$$

此处ξ_{j,i_k}是对S_{s-t}进行Gauss（高斯）简化所得常数。$c(A^{i_1}_{s,t}), \cdots, c(A^{i_{q'}}_{s,t})$的特征函数只要对上列方法进行修改即可得到。我们首先找出$c(A^i_{s,t})$中线性独立的最大子集（见例6.2），即S_{s-t}中最大的独立行的集合。用这些行构成基本$s-t$割集矩阵$S_{f,s-t}$，于是用$S_{f,s-t}$代替前面的S_{s-t}之后得

$$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}=\int_\Omega\cdots\int p(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{q'}})da_{i_1}da_{i_2}\cdots da_{i_{q'}} \tag{6.29}$$

此处Ω是由下列不等式所定义的积分域：

$$\left.\begin{array}{ll} a_{i_j}\geqslant r_{s,t} & j=1,2,\cdots,q' \\ \sum_{k=1}^{q'}\xi_{j i_k}a_{i_k}\geqslant r_{s,t}, & j=1,2,\cdots,q;\ j\neq i_k, k=1,2,\cdots q' \end{array}\right\} \tag{6.30}$$

须指出图G有m条线，q个$s-t$割集，只要割集数比图的$\lambda(G)=n-\rho$多，则S_{s-t}不可能是满秩的。对于绝大多数的图G，$q\gg n-\rho$，所以我们要用$S_{f,s-t}$代替S_{s-t}，并以低重积分（6.29）取代高重积分（6.28）。显然由于假设的普遍性过于广泛，这限制了简化计算的可能性。在以下各节中，只讨论一些满足更多条件的网。比如我们对于流的分布将作更多的假设，使我们能够找到计算$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}$的切实可行的技巧。

第五节　正态分布时的容量分析

一、正态分布假设的意义

若线容量矢的概率分布是已知的，虽然可以表示完整的解，但要完成必要的计算，工作量仍是浩大的。所以要研究简化计算的条件。

在随机领域里最一般性的假设之一，是正态性或说是高斯（Gauss）假设。实际观测结果或中心极限定理都支持了这种假设。在我们所讨论的问题中，这样的正态性假设是可以由下列背景来验证的：（1）在包括会话网在内的很多系统中，线上的流经查明是卜阿松分布的，它可以由正态分布来密切逼近；（2）线上的流实际上是大量独立随机变数之和，这是因为各线上的流是由许多支源汇集而成。这些独立变数可以认为只取0和1两个值。可以证明随机变数的标准化和的极限分布是正态的，所以当大量的用户来到同一条线时，流的分布就是渐近正态的。

今讨论正态分布。设F_k为以μ_k为均值，σ_k^2为方差的正态随机变数。则附加流x可以通过l_k的概率为

$$P\{c_k - F_k \geqslant x\} = 1 - \int_0^x \frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{[y-(c_k-\mu_k)]^2}{\sigma_k^2}\right)dy$$

流F_k实际上一定在区间[0，c_k]内变化的事实，就要求F_k的均值和方差应满足这样的条件：截去的尾可以忽略不计。

即

$$\int_0^{c_k} \frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_k)^2}{\sigma_k^2}\right]dy \approx 1 \qquad (6.31)$$

倘若上列方程不成立，则需按截尾分布来处理问题。纵或对线路的需求是正态分布的，然而线上的流的真实分布可以不是正态的。例如众多的人都企图使用一条容量很小的线路时，就是这种情况，这时的流F_k接近于线的容量。

方程(6.31)要求网G中每一线l_k上有足够大的容量c_k，以便使接纳线上的流的概率足够大。若此方程对某些线不成立，则不应企图有附加的流再经由这些线。故我们可以假设在G中所有的线上方程（6.31）都成立。此假设也同时指出了排队问题与我们所要考虑的问题之间的差别。在排队问题中，若遇到已饱和的线则必须等待它恢复到可用状态。对于各线满足方程（6.31）的图来说，有意义的参数是瞬时流和到达一个已知流的概率，即$P\{\tau_{s,t} \geqslant r_{s,t}\}$是图能够在顶点$v_s$与$v_t$之间接纳附加流容量的指标。

二、多维正态分布的计算方法

为了充分表达模型的概率结构，必须查明$F_1, F_2, \cdots, F_m$之间存在的关系。在这方面，我们假设多维随机矢$\mathbf{F}=\{F_1, \cdots, F_m\}$的联合分布可以由$m$维非退化正态分布逼近。详言之，随机矢量$\mathbf{x}=\{X_1, X_2, \cdots X_m\}$为多维非退化正态分布$N(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma})$，其均值矢为$\mu=\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m\}$、$m\times m$阶方阵——协方差矩阵为$\Sigma=[\sigma_{ij}]$，系指

$$\mu_i = E\{X_i\} \qquad i=1,2,\cdots,m. \qquad (6.32)$$

$$\sigma_{ij} = E\{(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\} \quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,m. \qquad (6.33)$$

$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$的概率密度为

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{\det\Sigma}} \exp\left[\frac{-1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right] \quad (6.34)$$

其中$\det\Sigma$为方阵Σ的行列式且$\det\Sigma \neq 0$，Σ^{-1}为Σ的逆阵，可以证明满足(6.33)的矩阵Σ为半正定的。另外，除去诸X_i以概率1线性相关的情况之外，矩阵Σ为正定的。所以，假设**F**为非退化正态分布，与下列假设是一样的：任一线（弧或边）上的随机流都不能表示为其它线上流的线性结合。但我们常遇到相反情况。事实上，我们回顾第四节所讨论的一般分析方法，割集变元常常是退化分布的，这里所遇到的情况也是与此类似的。

F的概率密度是

$$p(\mathbf{f}') = p(f_1, f_2, \cdots, f_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{\det\Sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{f}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{f}-\boldsymbol{\mu})\right]$$

因为$\mathbf{D}=\mathbf{c}-\mathbf{F}$故矢$\mathbf{D}$的分布为$N(\mathbf{c}-\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，如同第四节一样，我们需要求$P\{\tau_{s,t} \geqslant r_{s,t}\}$，由极大流极小截定理，$r_{s,t}$为可达的充分必要条件是

$$\min[c(A^1_{s,t}), \cdots, c(A^q_{s,t})] = \tau_{s,t} \geqslant r_{s,t} \quad (6.35)$$

显然 $P\{\tau_{s,t} \geqslant r_{s,t}\} = P\{c(A^1_{s,t}) \geqslant r_{s,t}, c(A^2_{s,t}) \geqslant r_{s,t}, \cdots, c(A^q_{s,t}) \geqslant r_{s,t}\}$

故仍需计算$\mathbf{A}=\{c(A^1_{s,t}), \cdots, c(A^q_{s,t})\}$的联合分布。随机矢$\mathbf{A}$和$\mathbf{D}$经$s-t$割集矩阵而发生下列关系($\mathbf{S}_{s-t}=[a_{ij}]$)：

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_{s-t}\mathbf{D} \quad (6.36)$$

于是，A由D经线性变换可得。正态随机变数的线性变换本身也是正态的。又因D的分布为$N(c-\mu, \Sigma)$，故A的分布为$N[\mathrm{S}_{s-t}(\mathbf{c}-\boldsymbol{\mu}), \mathrm{S}_{s-t}\Sigma \mathrm{S}'_{s-t}]$。这只要查看一下D的特征函数$H(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$我们就可以知道这一事实的正确性，因为

$$\mathrm{H}(\alpha') = \mathrm{H}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \mathrm{E}\{\exp(\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{m} \alpha_j d_j)\} = \exp(\sqrt{-1}(\mathbf{c}-\boldsymbol{\mu})'\alpha - \frac{1}{2}\mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a}) \quad (6.37)$$

设$\Psi(\beta_1, \cdots, \beta_q)$是A的特征函数

$$\Psi(\beta') = \Psi(\beta_1, \cdots, \beta_q) = \mathrm{E}\{\exp(\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{q} \beta_j c(A^j_{s,t}))\} \quad (6.38)$$

由于

$$\sum_{i=1}^{q} \beta_i c(A^i_{s,t}) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sum_{k=1}^{m} a_{jk} d_k \quad (6.39)$$

由此推出

$$\Psi(\beta_1, \cdots, \beta_q) = \exp\left(\sqrt{-1}\,[\mathbf{S}_{s-t}(\mathbf{c}-\boldsymbol{\mu})]'\boldsymbol{\beta} - \frac{1}{2}\beta'\mathrm{S}_{s-t}\Sigma \mathrm{S}'_{s-t}\beta\right) \quad (6.40)$$

这就是依$N[\mathrm{S}_{s-t}(\mathbf{c}-\boldsymbol{\mu}), \mathrm{S}_{s-t}\Sigma \mathrm{S}'_{s-t}]$分布的随机变数的特征函数。

若S_{s-t}在实数域上的秩为$q'<q$，则方差-协方差矩阵必是退化的。这表示有的割集可以用其它割集的线性结合表示。若$q'<q$，则$[\mathrm{S}_{s-t}\Sigma \mathrm{S}'_{s-t}]^{-1}$不存在。在这种情况下，我们可以重新安排$A^i_{s,t}$的次序，使$c(A^1_{s,t}), \cdots, c(A^{q'}_{s,t})$间无线性关系。存在常数$\xi_{k,q'+h}$，$k=1, 2, \cdots, q'$；$h=1, 2, \cdots, q-q'$使(见例6.2)。

$$c(\mathrm{A}_{s,t}^{k})=\sum_{k=1}^{q'}\xi_{k,q+1}^{j}\cdot c(\mathrm{A}_{s,t}^{k}) \tag{6.41}$$

设$S_{f,s-t}$ 是$q'\times m$阶的、由相应于$\mathrm{A}_{s,t}^{1},\mathrm{A}_{s,t}^{2},\cdots,\mathrm{A}_{s,t}^{q'}$的行所构成的矩阵. 注意这里诸$\mathrm{A}_{s,t}^{j}$的编号是在上边重新排过的序号。于是

$$\begin{pmatrix} c(\mathrm{A}_{s,t}^{1}) \\ \vdots \\ c(\mathrm{A}_{s,t}^{q'}) \end{pmatrix}=S_{f,s-t}\,\mathrm{D} \tag{6.42}$$

所以最大流至少是$r_{s,t}$的概率，可写为

$$\mathrm{P}\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}=\int\cdots\int\frac{1}{(2\pi)^{q'/2}\sqrt{\det(S_{f,s-t}\,\Sigma S'_{f,s-t})}}\cdot\exp\Big[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-S_{f,s-t}(\mathbf{c}-\mu))'$$

$$[S_{f,s-t}\,\Sigma\,S'_{f,s-t}]^{-1}(\mathbf{x}-S_{f,s-t})(\mathbf{c}-\mu)\Big]d\mathbf{x} \tag{6.43}$$

此处Ω由式（6.30）定义。

为了计算$\mathrm{P}\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}$，则必须计算多维正态分布的概率积分。我们将其主要步骤略述如下。

若D之分布为$N(\mathbf{c}-\mu,\Sigma)$，则其相关矩阵为$m\times m$阶的，记

$$R(\mathrm{D})=(\rho_{ij}^{\mathrm{D}})$$

其中

$$\rho_{ij}^{\mathrm{D}}=\frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{i,i}\cdot\sigma_{j,j}}}\quad,\ [\Sigma=(\sigma_{ij})] \tag{6.44}$$

显然$\rho^{\mathrm{D}}_{ii}=1$对一切i成立，在给出Σ之后，可以立即求得$R(\mathrm{D})$。A的方差-协方差矩阵为$S_{s-t}\Sigma S'_{s-t}$，所以A的相关矩阵$R(\mathrm{A})$也是可以立即得到的。例如，若$d_1,d_2,\cdots,d_m$为互独立随机变数，有共同方差1时，则$R(\mathrm{A})$的第i-j位置上的元为

$$\rho_{ij}^{\mathrm{A}}=\frac{n_{ij}}{\sqrt{n_{i,i}}\sqrt{n_{jj}}} \tag{6.45}$$

其中n_{ij}是$\mathrm{A}_{s,t}^{i}\cap\mathrm{A}_{s,t}^{j}$中的线数。

为简化的需要，将$c(\mathrm{A}_{s,t}^{i})$标准化来考虑随机变数$c(\hat{\mathrm{A}}_{s,t}^{i})$，

$$c(\hat{\mathrm{A}}_{s,t}^{i})=\frac{c(\mathrm{A}_{s,t}^{i})-E\{c(\mathrm{A}_{s,t}^{i})\}}{(\mathrm{Var}\{c(\mathrm{A}_{s,t}^{i})\})^{1/2}} \tag{6.46}$$

于是，若令

$$\rho_{\min}=\min_{i\neq j}[\rho_{ij}],\qquad \rho_{\max}=\max_{i\neq j}[\rho_{ij}]$$

则可得

$$\mathrm{P}\{c(\hat{\mathrm{A}}_{s,t}^{1})\geqslant r_1,\cdots,c(\hat{\mathrm{A}}_{s,t}^{q})\geqslant r_q\} \tag{6.47}$$

的估计式（其中$r_i=\{r_{s,t}-\sum_j a_{ij}^{*}(c_j-\mu_j)\}/[\mathrm{Var}\,c(\mathrm{A}_{s,t}^{i})]^{1/2}$），

---

* $S_{s-t}=(a_{ij})$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{q}\Phi\left(\frac{\sqrt{\rho_{min}}\,y-r_i}{\sqrt{1-\rho_{min}}}\right)\phi(y)\,dy\leqslant P\{c(\hat{A}^1_{s,t})\geqslant r_1,\cdots,c(\hat{A}^q_{s,t})\geqslant r_q\}$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{q}\Phi\left(\frac{\sqrt{\rho_{max}}\,y-r_i}{\sqrt{1-\rho_{max}}}\right)\phi(y)\,dy \qquad (6.48)$$

其中$\Phi(\cdot)$和$\phi(\cdot)$分别表示标准化了的一维正态随机变数的分布函数和密度函数。

例6.6，为了说明上列概念，见图6—4，它的s-t割集矩阵为

$$S_{s-t}=\begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

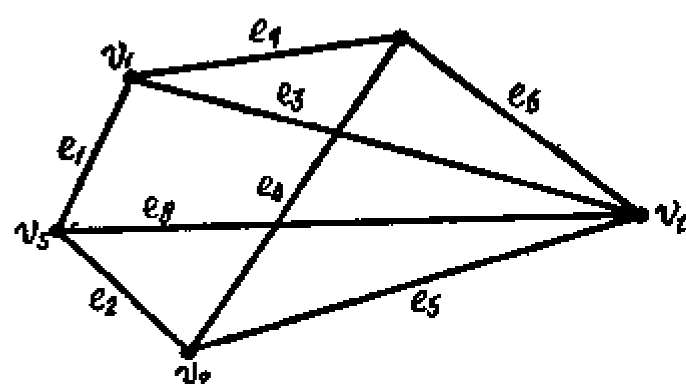


图6—4 例6.6用图

在$A^i_{s,t}\cap A^j_{s,t}$中的线数，$i\leqslant j$。

$n_{1,1}=3$

$n_{1,2}=2$，$n_{2,2}=4$

$n_{1,3}=3$，$n_{2,3}=1$，$n_{3,3}=4$

$n_{1,4}=2$，$n_{2,4}=3$，$n_{3,4}=2$，$n_{4,4}=5$

$n_{1,5}=2$，$n_{2,5}=2$，$n_{3,5}=3$，$n_{4,5}=2$，$n_{5,5}=5$

$n_{1,6}=1$，$n_{2,6}=3$，$n_{3,6}=3$，$n_{4,6}=3$，$n_{5,6}=3$，$n_{6,6}=5$

$n_{1,7}=1$，$n_{2,7}=2$，$n_{3,7}=2$，$n_{4,7}=3$，$n_{5,7}=3$，$n_{6,7}=3$，$n_{7,7}=4$

所以如果线上流的方差-协方差矩阵是单位矩阵，则随机割集矢A的相关矩阵为：

$$R(A)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 1 & \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} & 1 \end{pmatrix}$$

所以$\rho_{min}=\frac{1}{4}$，$\rho_{max}=3/2\sqrt{5}$。若令

$$r_i=\left[r_{s,t}-\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(c_j-\mu_j)\right]\Big/\sqrt{n_{ii}}$$

则得估计式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{7}\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{2}{\sqrt{3}}r_i\right)\phi(y)\,dy\leqslant P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{7}\Phi\left(\frac{3}{\sqrt{20-6\sqrt{5}}}y-\frac{r_i}{\sqrt{1-(3/2\sqrt{5})}}\right)\phi(y)\,dy$$

第六节 逼 近 法

一、Monte-Carlo（蒙特-卡罗）方法的意义

计算极大流的概率，即使假设线上的流为正态分布时，其工作量也是浩繁的。本节用*Monte-Carlo*技术，专门讨论它的定性估计。

*Monte-Carlo*方法与随机数实验有密切关系。最简单的*Monte-Carlo*方法为观测这样的随机数：用它去直接模拟所研究的物理过程，然后由这些随机数的变化规律来推定所求的解。*Monte-Carlo*方法的关键是这些随机变数的产生方法，因为它们必须与探讨中的过程具有同样的统计性质。随机数表虽可奏效，但不如数字计算机得出随机数更为优越。因为用一组固定的规则，可以用计算机非常方便地得出随机数来。用这样的规则所得出的数，叫作伪随机变数，它具有这样的性质：标准的统计鉴定不可能发现它与随机性有任何显著的偏差。由于伪随机变数得出的数列具有再产生的优越性，故可用来重复实验。

二、Monte-Carlo方法的应用

*Monte-Carlo*方法可按下列方式用于极大流问题。我们用随机地产生边（上的）流矢集$\{\mathbf{F}(k);\ k=1,2,\cdots,N\}$的办法，大量重复地模拟一个系统。然后应用极大流极小截定理，经由关系

$$\tau_{s,t}(k)=\min\{S_{s,t}[\mathbf{C}-\mathbf{F}(k)]\}$$

来确定第k个通过图的极大流。将此手续重复N次之后，定义函数$S_N(Z)$：

$$S_N(Z)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}h_Z\left[\tau_{s,t}(k)\right]$$

其中

$$h_Z(x)=\begin{cases}0 & 对于x\geqslant Z\\ 1 & 对于x<Z\end{cases}$$

于是，$NS_N(Z)$就是$\tau_{s,t}(k)$小于Z的数目，而Z是一个任意实数。

函数$S_N(Z)$可取0与1之间的值，且为Z的非减函数。易验证$S_N(Z)$是左连续的，而且满足概率分布函数的全部性质。对任一Z，$S_N(Z)$为一随机变数。它叫作$\tau_{s,t}$的经验分布函数，且与$\tau_{s,t}$的真分布函数$P\{\tau_{s,t}<Z\}$非常密合。其关系见下列定理。

定理6.1（哥里汶科定理），设$S_N(x)$是具有N个元素的样本的经验分布函数，又设母体X的理论分布函数为$F(x)$，则当N趋于无穷时，叙列$S_N(x)$在$-\infty<x<\infty$上一致地收敛于$F(x)$的概率等于1。即令$\varDelta_N$为随机变数

$$\varDelta_N=\sup_x|S_N(x)-F(x)|$$

时，

$$P\{\lim_{N\to\infty}\varDelta_N=0\}=1$$

按这个定理，若选一个充分大的N，则$\tau_{s,t}$的经验分布函数将以接近1的概率逼近$\tau_{s,t}$的真正概率分布函数$F(x)$。

例6.7：考虑图6—5与图6—6，为简化计，假设边（上的）流为互独立、同一正态

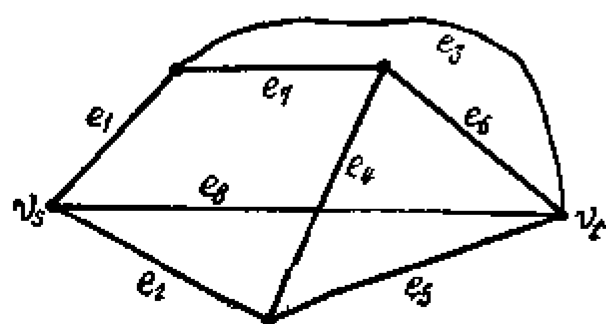


图6—5　G_1

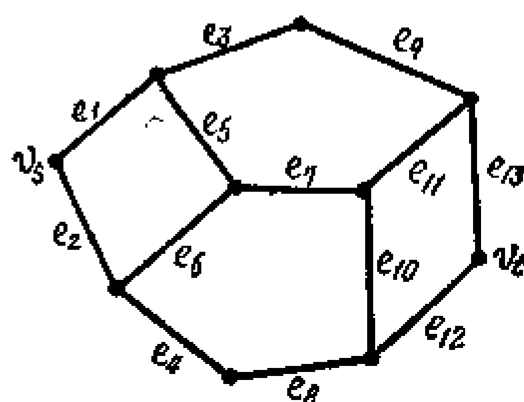


图6—6　G_2

分布的随机变数。由于边容量的有限性和流的非负性，使截尾成为必要的。当边流产生之后，截尾的功效就被包含在内了。我们把容量作为一个变异参数，且对一个固定的容量矢$C=\{c_1,\cdots,c_m\}$，对于极大流的100个样本产生$1-S_N(Z)$的值。在有些情况，每一边的容量都取作常数C；其次可令C在一个大范围内变化。在另外的情况，图中边的某子集的边容量是可变的，而其它的边容量是不变的。曾对图G_1和G_2进行过这种形式的分析，在每一情况中都把边流的均值取作3并设方差为1。而边容量在$C=4$与$C=10$之间变化。图6—7到图6—9表示出模拟的一些结果。由此模拟反映出来的一个显著结果是，在每一情况$S_N(Z)$都可以由累积正态分布函数精确地逼近，这一事实由图6—10和图6—11表明。不管$S_N(Z)$的极限分布为何，我们所关心的概率可以由正态逼近得到它的合理估计值。

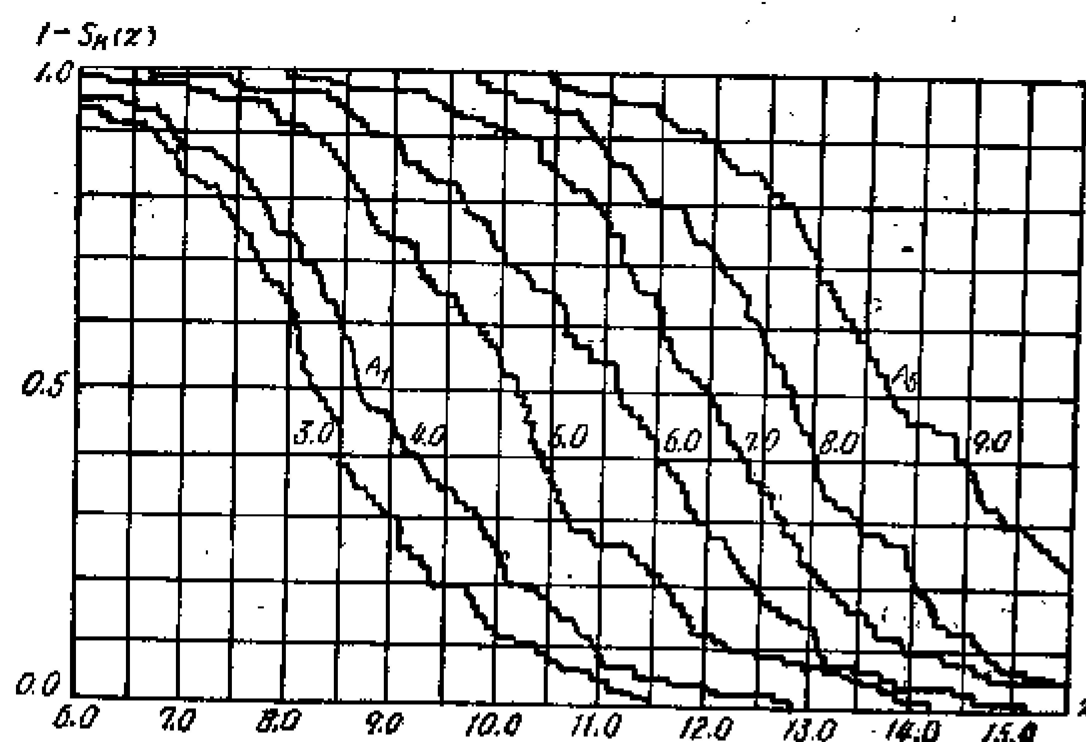


图　6—7

图G_1中C_8的容量由$C_8=3.0$变到$C_8=9.0$，其它边容量均为7

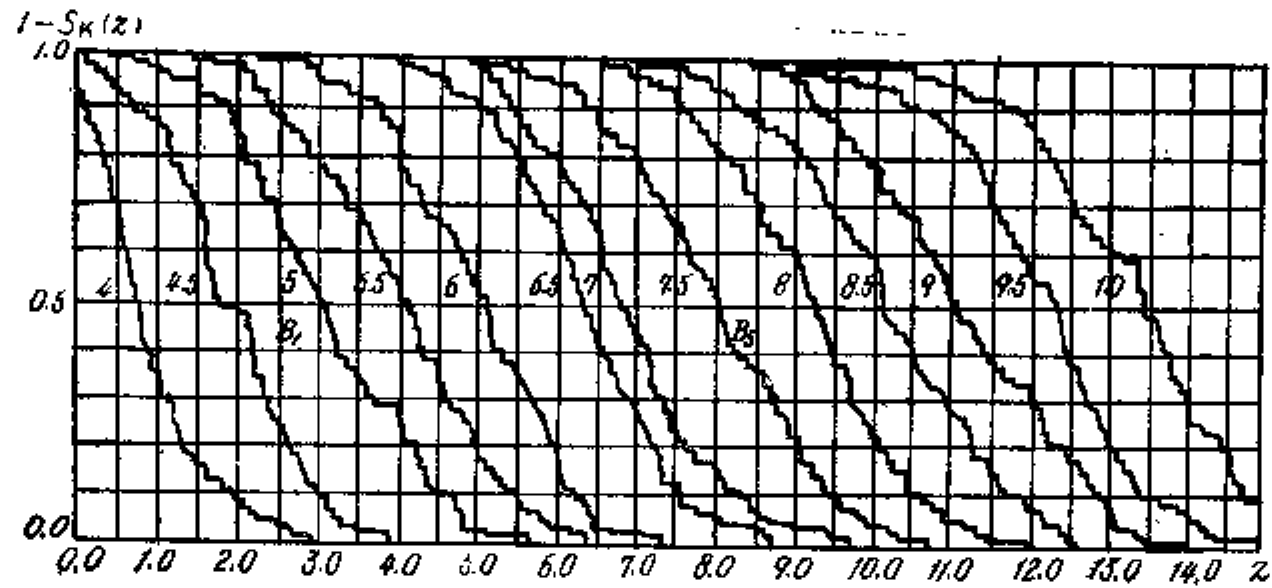


图 6—8

G_2的一切边容量均在C = 4 到C = 8.6之间变化

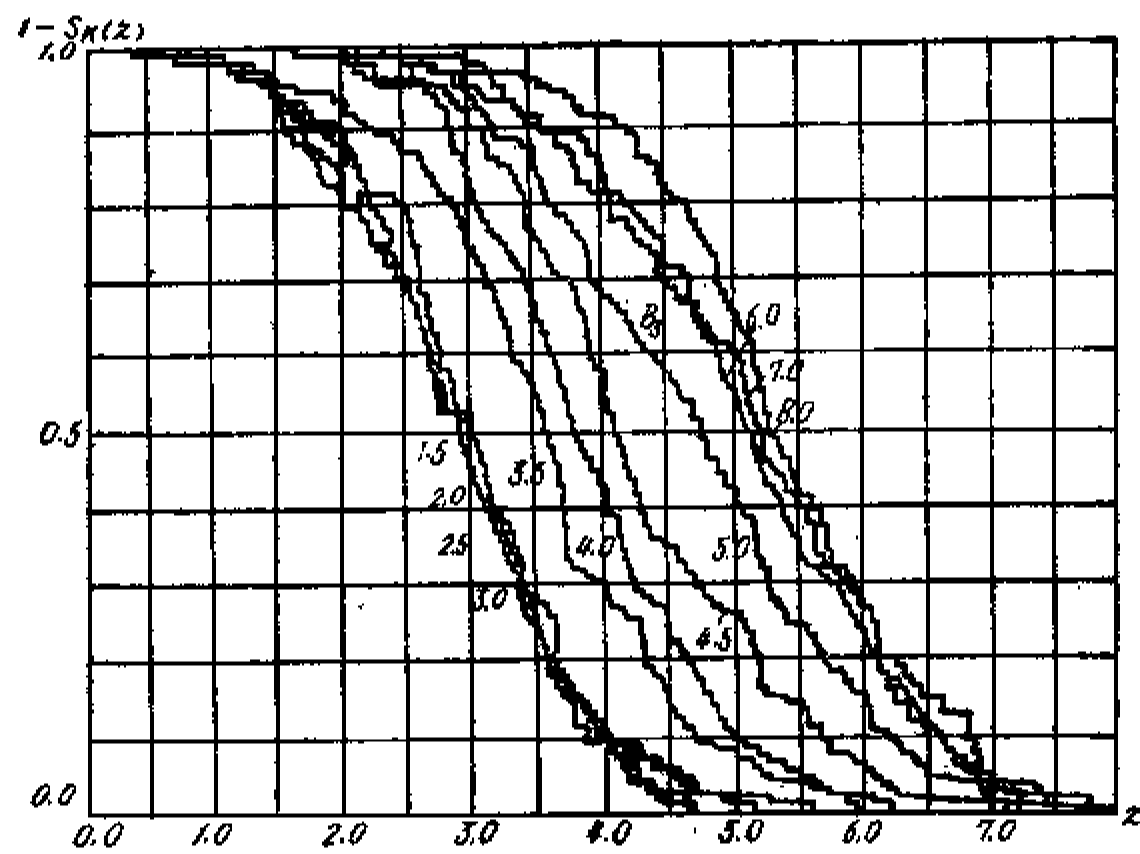


图 6—9

G_2的C_3，C_4，C_5，C_6各边容量由C = 1.5变到C = 8.0，所有其它边容量为 9

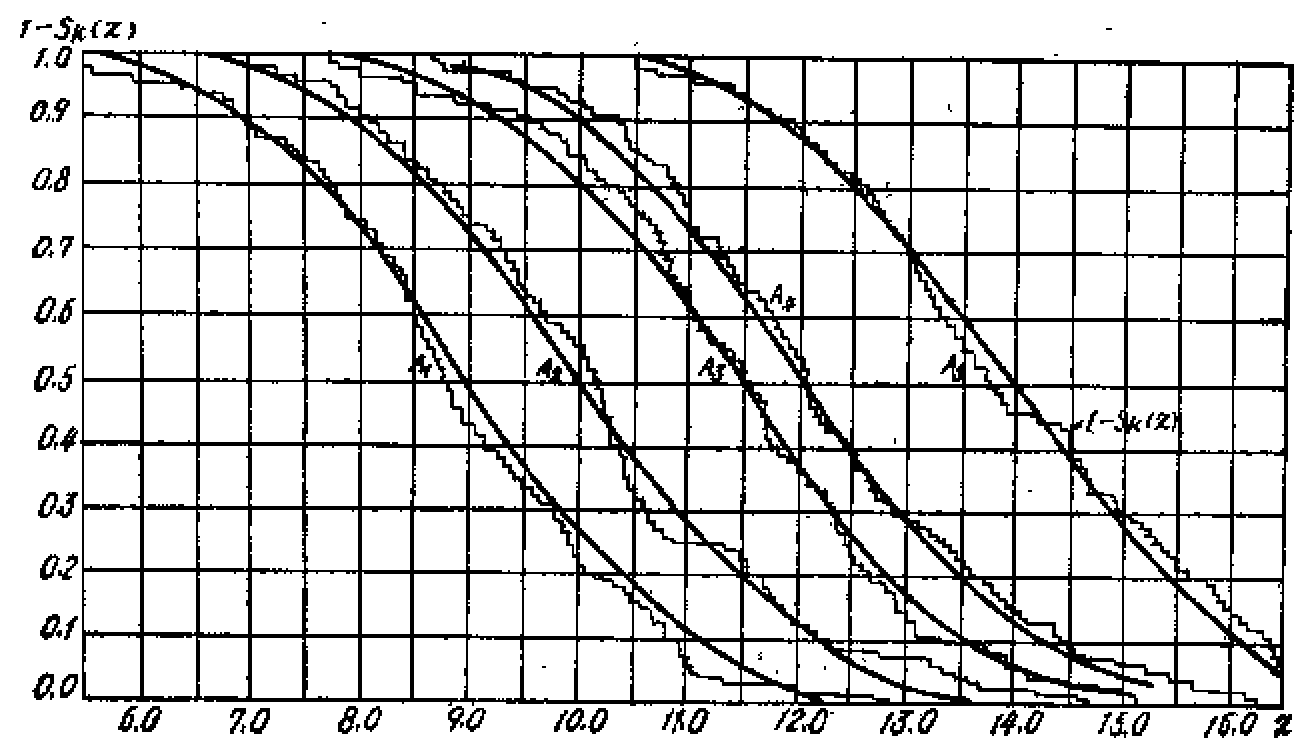


图 6—10 用方差≈2.7的正态分布来逼近G_1的用$Monte$-$Carlo$模拟所产生的经验曲线

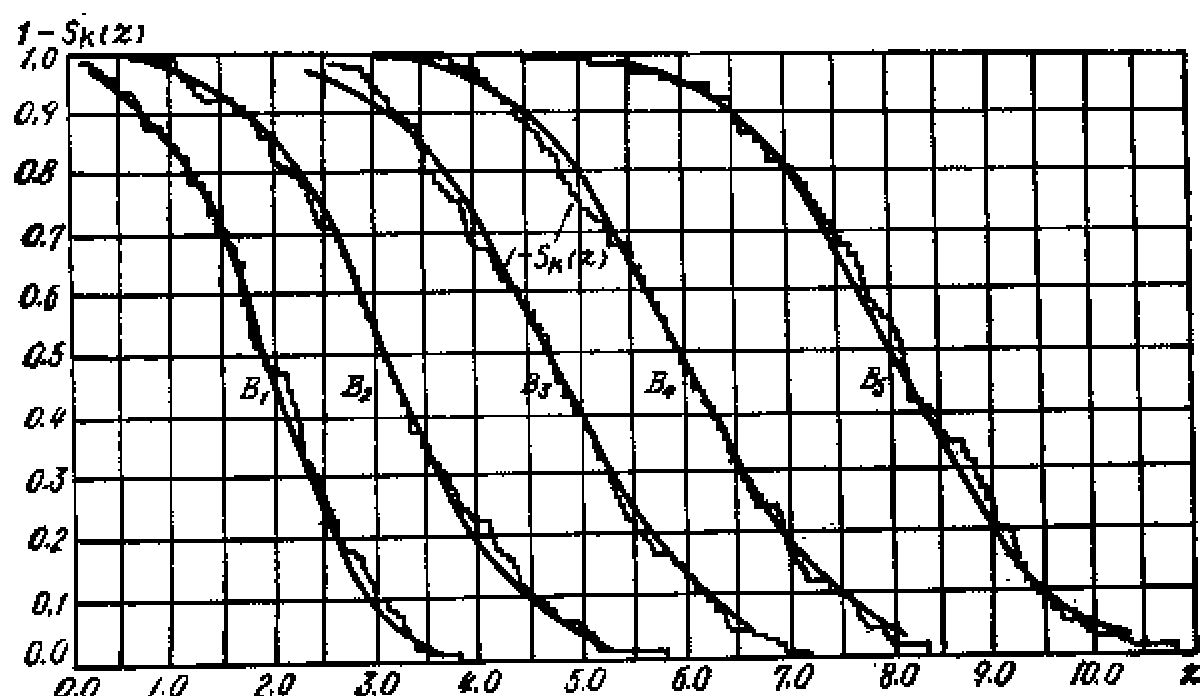


图 6—11　用正态分布函数逼近G_2的由*Monte-Carlo*模拟产生的经验曲线
渐近曲线的方差为：$B_1=0.64$；$B_2=1.22$；$B_3=1.4$；$B_4=1.4$；$B_5=1.4$

即使我们假设极大流的概率分布可以由正态分布充分地逼近，但求概率P $\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}$的问题仍是遥远的。我们必须求出$E\ \{\tau_{s,t}\}$ 和Var $\{\tau_{s,t}\}$ 即$\tau_{s,t}$的均值和方差。 由第四节和第五节里所给P$\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}$的积分形式中，可以知道这是一个非常困难的问题。然而，如果我们应用*Clark*（克拉科）方法，则对于小图问题变为可解。

设X_1和X_2为正态随机变数。则可以给出随机变数$\min\{X_1,\ X_2\}$的矩量的精确表达式。若假设$\min\{X_1,X_2\}$为正态且X_3也是正态时，则可以算出$\min\{\min\{X_1,X_2\},X_3\}$的矩量。在各步都求出$\min\{X_1,\cdots,X_i\}$的矩量后，若假设变数是正态分布的，求$\min\{\min\{X_1,\cdots,X_i\},X_{i+1}\}=\min\{X_1,\cdots,X_i,X_{i+1}\}$的各阶矩。由归纳法可计算出$\min\{X_1,\cdots X_q\}$的各阶矩。当然，这样的计算都是不精确的，这是因为$\min\{X_1,\cdots,X_i\}$并非正态分布。实践证明，这样所带来的误差并不显著。

设X_1,X_2和X_3均为正态分布，它们的均值和方差分别为μ_1，μ_2和$E\{X_3\}$及σ_1^2，σ_2^2和Var$\{X_3\}$。这里$E\{X_3\}$和Var$\{X_3\}$表示尚未计算出来，故未给予特殊标记。设Cor(·,·)表示括弧内两个变数间的线性相关系数。并定义$\mathrm{Cor}(X_1,X_2)=\zeta$，$\mathrm{Cor}(X_1,X_3)=\zeta_1$，且$\mathrm{Cor}(X_2,X_3)=\zeta_2$。

若$\sigma_1=\sigma_2$；$\zeta=1$时，则X_1和X_2仅差一个常数。故$\min\{X_1,X_2\}$容易求到。对其它情况，则设$\nu_i(2)$为随机变数$\min\{X_1,X_2\}$关于原点的第i阶矩，并令

$$a^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\zeta \tag{6.49}$$

和

$$\alpha=(\mu_2-\mu_1)/a \tag{6.50}$$

于是可以证明

$$\nu_1(2)=\mu_1\Phi(\alpha)+\mu_2\Phi(-\alpha)-a\phi(\alpha) \tag{6.51}$$

$$\nu_2(2)=(\mu_1^2+\sigma_1^2)\Phi(\alpha)+(\mu_2^2+\sigma_2^2)\Phi(-\alpha)-(\mu_1+\mu_2)a\phi(\alpha) \tag{6.52}$$

和

$$\mathrm{Cor}(\min\{X_1,X_2\}X_3)=[\sigma_1\zeta_1\Phi(\alpha)+\sigma_2\zeta_2\Phi(-\alpha)]/(\nu_2-\nu_1^2)^{1/2} \tag{6.53}$$

今设$\nu_i(k)$是随机变数$\min\{X_1,\cdots,X_k\}$关于原点的第i阶矩。设$k=3$，为了计算$\min\{X_1,X_2,X_3\}$的矩，我们引用公式(6.51)到(6.53)来计算$\min\{\min\{X_1,X_2\},X_3\}$的矩。首先求出$\nu_1(2)$和$\nu_2(2)$，然后求Var$\{\min\{X_1,X_2\}\}$。于是用$\nu_1(2)$代替$\mu_1$，用$E\{X_3\}$代替$\mu_2$，并在定理6.1及式(6.53)中用$\mathrm{Cor}(\min\{X_1,X_2\},X_3)$代替$\zeta$，则求得：

例6.7：考虑图6—5与图6—6，为简化计，假设边（上的）流为互独立、同一正态

$$\nu_1(3)=E(\min\{X_1,X_2,X_3\}) \tag{6.54}$$

$$\nu_2(3)=E([\min\{X_1,X_2,X_3\}]^2) \tag{6.55}$$

和
$$\mathrm{Cor}(\min\{X_1,X_2,X_3\},X_k),\quad k=4,5,\cdots,q \tag{6.56}$$

在此手续的第 j 步上我们计算

$$\nu_1(j)=E(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_j\}) \tag{6.57}$$

$$\nu_2(j)=E([\min\{X_1,X_2,\cdots,X_j\}]^2) \tag{6.58}$$

和
$$\mathrm{Cor}(\min\{X_1,\cdots,X_j\},X_{j+k})\quad k=1,2,\cdots,q-j \tag{6.59}$$

为便于计算$\mathrm{Cor}(\min\{X_1,\cdots,X_j\},X_{j+k})$，我们把它改写为

$$\mathrm{Cor}(\min\{X_1,\cdots,X_j\},X_{j+k})=\mathrm{Cor}(\min\{\min\{X_1,\cdots,X_{j-1}\},X_j\},X_{j+k}) \tag{6.60}$$

为了计算这个结果，须计算$\mathrm{Cor}(\min\{X_1,\cdots,X_{j-1}\},X_{j+k})$并将它和$\mathrm{Cor}(X_j,X_{j+k})$分别代入（6.53）中的$\zeta_1$和$\zeta_2$即可。后者$\mathrm{Cor}(X_j,X_{j+k})=\zeta_{j,j+k}$是已知的，而前者在第$j-1$步上也是已经计算过了。所以可以继续此手续，直到求得$\min\{X_1,\cdots,X_q\}$的矩量。

将上列手续使用于随机割集变元$c(A^1_{s,t}),\cdots,c(A^q_{s,t})$可以求得极大流$\tau_{s,t}$的均值和方差。于是由$\min\{c(A^1_{s,t}),\cdots,c(A^q_{s,t})\}$为正态分布之假设，得

$$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}=1-\Phi\left(\frac{r_{s,t}-\nu_1(q)}{\sqrt{\nu_2(q)-\nu_1^2(q)}}\right)$$

例6.8：设G为图6—12所示，假设边上的流为互独立同分布正态随机变数，其均值矢$\mu=\{3,3,3,3\}$，方差-协方差矩阵为单位矩阵。并设各边之容量均为$c_i=5$。于是各随机边容变元为独立的正态变元，其均值为2，方差为1。G的割集矩阵为

$$S_{s-t}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&1\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

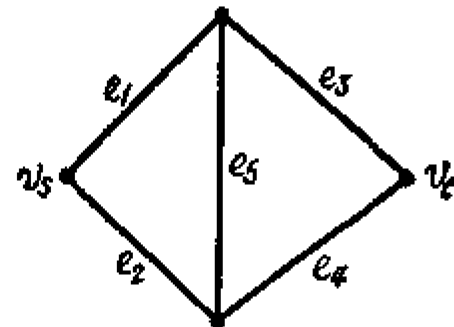


图6—12　例6.8用图

由式（6.45）容易求出割集的相关矩阵，于是

$$R(A)=\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&1&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&1&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}$$

由式（6.49）和（6.50）得

$$a^2=2+2-2\sqrt{2}(\sqrt{2})(0)=4$$

$$a=\frac{4-4}{2}=0$$

从而由式（6.51）和（6.52）得

$$\nu_1(2)=4\Phi(0)+4\Phi(0)-2\phi(0)\approx 3.2$$

$$\nu_2(2)=(16+2)\Phi(0)+(16+2)\Phi(0)-2(4+4)\phi(0)\approx 11.6$$

且

$$\nu_2(2)-\nu_1^2(2)\approx 1.27$$

所以

$$\mathrm{Cor}[\min\{c(A^1_{s,t}),c(A^2_{s,t})\},c(A^3_{s,t})]$$

$$=\left[\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\Phi(0)+\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\Phi(0)\right]\Big/\sqrt{1.27}\approx 0.51$$

又因

$$\rho^4_{1,3}=\rho^4_{1,4}$$

故得

$$\mathrm{Cor}[\min\{c(A^1_{s,t}),c(A^2_{s,t})\},c(A^4_{s,t})]\approx 0.51$$

为求$\min\{c(A^1_{s,t}),c(A^2_{s,t}),c(A^3_{s,t})\}$的矩，可以把方才算得的数与$E[c(A^3_{s,t})]$及$\mathrm{Var}[c(A^3_{s,t})]$一齐代入式（6.49）到（6.52）中，则有

$$a^2=1.27+3-2\sqrt{1.27}\cdot\sqrt{3}(0.51)=2.33$$

$$a=(6-3.2)/\sqrt{2.33}\approx 1.86$$

和

$$\nu_1(3)=3.2\Phi(1.86)+6\Phi(-1.86)-1.5\phi(1.86)\approx 3.1$$

$$\nu_2(3)=(3.2^2+1.27)\Phi(1.86)+(6^2+3)\Phi(-1.86)-(3.2+6)(1.5)\phi(1.86)\approx 11.4$$

由此得

$$\nu_2(3)-\nu_1^2(3)\approx 1.8$$

$\min\{c(A^1_{s,t}),c(A^2_{s,t}),c(A^3_{s,t})\}$和$c(A^4_{s,t})$之间的相关由下式可得

$$\mathrm{Cor}[\min\{c(A^1_{s,t}),c(A^2_{s,t}),c(A^3_{s,t})\},c(A^4_{s,t})]$$

$$=\mathrm{Cor}[\min\{\min\{c(A^1_{s,t}),c(A^2_{s,t})\},c(A^3_{s,t})\},c(A^4_{s,t})]$$

因为

$$\mathrm{Cor}(\min\{c(A^1_{s,t}),c(A^2_{s,t})\}c(A^4_{s,t}))=\zeta_1\approx 0.51$$

由式（6.53）可得

$$\mathrm{Cor}[\min\{c(A^1_{s,t}),c(A^2_{s,t}),c(A^3_{s,t})\},c(A^4_{s,t})]$$

$$=\left[\sqrt{1.27}(0.51)\Phi(1.86)+\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\right)\Phi(-1.86)\right]\Big/\sqrt{1.8}\approx 0.51$$

现在可以求$\tau_{s,t}$的矩。令

$$a^2=1.8+3-2\sqrt{1.8}\sqrt{3}(0.51)\approx 2.3$$

$$a=(6-3.1)/\sqrt{2.3}\approx 1.9$$

于是

$$E(\tau_{s,t})=3.1\Phi(1.9)+6\Phi(-1.9)-(1.53)\phi(1.9)\approx 3$$

$$E(\tau^2_{s,t})=(3.1^2+1.8)\Phi(1.9)+(6^2+3)\Phi(-1.9)-(3.1+6)\sqrt{2.3}\phi(1.9)\approx 11.3$$

$$\mathrm{Var}(\tau_{s,t})=11.3-3^2\approx 2.3$$

由此得

$$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}\approx 1-\Phi\left(\frac{r_{s,t}-3}{\sqrt{2.3}}\right)$$

第七节　正态分布的极大流的容量分析

一、检定的特殊形式

现在进一步研究$\tau_{s,t}$可由正态随机变数逼近的情况。在第三节里讨论了这样的情况：边

上的流的概率分布是未知的，但是可以取得样本。在这一节里我们将研究关于$\tau_{s,t}$的概率分布的知识对于检定问题的影响。为此，假设$F(k)=\{f_1(k),\cdots,f_m(k)\}$是在时刻$k,k=1,2,\cdots,N$，流$F_1,\cdots,F_m$的测定值。与前面一样假设$F(1),F(2),\cdots,F(N)$是互独立同分布随机变数。

检定假设

$$H_0: \qquad p=P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}\geqslant p_0 \tag{6.61a}$$

针对假设为

$$H_1: \qquad p<p_0 \tag{6.61b}$$

检定水平为α，其中α为第一种错误的概率。由假设$\tau_{s,t}$是正态随机变数，其均值为$\nu_1(q)$，方差为$\sigma^2=\nu_2(q)-\nu_1^2(q)$。对于$F(k)$的每一个值，计算

$$\tau_{s,t}(k)=\min_{1\leqslant i\leqslant q}\left\{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}[c_j-f_j(k)]\right\},\quad k=1,2,\cdots,N \tag{6.62}$$

随机变数$\tau_{s,t}(1),\tau_{s,t}(2),\cdots,\tau_{s,t}(N)$是互独立同分布的，共同的均值为$\nu_1(q)$，方差为$\sigma^2$，$\tau_{s,t}$不小于$r_{s,t}$的概率可表为：

$$p=P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}=1-\Phi\left(\frac{r_{s,t}-\nu_1(q)}{\sigma}\right) \tag{6.63}$$

由此推知

$$\Phi\left(\frac{r_{s,t}-\nu_1(q)}{\sigma}\right)=1-p \tag{6.64a}$$

所以

$$\frac{r_{s,t}-\nu_1(q)}{\sigma}=\Phi^{-1}(1-p) \tag{6.64b}$$

因为Φ和Φ^{-1}是严格单调增函数，故假设H_0变为

$$\frac{r_{s,t}-\nu_1(q)}{\sigma}\leqslant\Phi^{-1}(1-p_0) \tag{6.65}$$

或当我们定义新随机变数

$$\hat{\tau}_{s,t}(i)=\tau_{s,t}(i)-r_{s,t}, \qquad i=1,2,\cdots,N$$

时，式（6.65）变为

$$-\xi/\sigma\leqslant\Phi^{-1}(1-p_0) \tag{6.66}$$

其中$\xi=\nu_1(q)-r_{s,t}$，此时检定的假设就变为

$$\hat{H}_0: \qquad \frac{\xi}{\sigma}\geqslant\theta_0=-\Phi^{-1}(1-p_0) \tag{6.67a}$$

针对假设为

$$\hat{H}_1: \qquad \frac{\xi}{\sigma}<\theta_0 \tag{6.67b}$$

其中ξ和σ^2是互独立同分布的各正态变数$\hat{\tau}_{s,t}(1),\cdots,\hat{\tau}_{s,t}(N)$的均值和方差。

二、充分统计量

在讨论由（6.67）所定义的检定问题之前，需要引入一些统计概念。设随机变数X的概率分布的参数集合为Ω，P_θ为参数取值$\theta\in\Omega$时X的一个概率分布。则概率分布类为$\{P_\theta, \theta\in\Omega\}$。在取得$X$的一个随机样本$(x_1,x_2,\cdots,x_N)$之后，统计检定需要能辨别$\theta$的

真、假值。样本所蕴含的有些信息对于检定问题经常是不相干的。例如若θ为X的均值，x_i的序次就不包含有用的信息，故可以不计。

为了说明充分统计量的意义，首先看一个例子。设$X_1, X_2, \cdots, X_N$是在区间$[0, \theta]$上的互独立同分布的均匀随机变数，$(X_1, X_2, \cdots, X_N)$ 的联合密度在点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 上的值为：

$$p_\theta(\mathbf{x}) = \theta^{-N} \cdot u[\max_i x_i, \theta] \tag{6.68}$$

其中$u[a,b] = 1$若$a \leqslant b$；否则$u[a,b] = 0$。在对θ进行估计时，随机变数$X_1, X_2, \cdots, X_N$的最大值$\max_i\{X_i\}$是唯一重要的因素，因为$\max_i\{x_i\}$包含样本 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 所能提供的关于θ的全部信息。故称$\max_i\{x_i\}$为θ的充分统计量。确切地说，如果一个随机变数包含了样本 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 所能提供的关于θ的全部信息，则称此随机变数为参数θ的**充分统计量**。一般地说T是参数θ的充分统计量，系指密度函数$p_\theta(\mathbf{x})$可以分解为以下形式：

$$p_\theta(\mathbf{x}) = g_\theta[T(\mathbf{x})]h(\mathbf{x}) \tag{6.69}$$

其中$g_\theta[T(\mathbf{x})]$是θ和$\mathbf{x}$的函数，但是g_θ仅仅通过$T(X)$这一统计量而与$\mathbf{x}$有关，且$h(\mathbf{x})$是一个与θ无关的$\mathbf{x}$的函数。关于充分统计量有一个重要性质：若T为θ的充分统计量，则当已知$T = t$时，任何其它统计量的条件分布均与θ无关，所以它们不再提供关于θ的任何信息。

例6.9：设$X_1, X_2, \cdots, X_N$是互独立、同分布正态随机变数，均值为θ_1方差为θ_2。则$(X_1, X_2, \cdots, X_N)$ 的概率密度在点$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的值为：

$$\begin{aligned} p_\theta(\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_i-\theta_1)^2}{\theta_2}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi\theta_2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta_1^2\right]\right\} \end{aligned} \tag{6.70}$$

此处及以下的$p_\theta(\mathbf{x})$中的$\theta = (\theta_1, \theta_2)$是一个二维变元，$\theta = (\theta_1, \theta_2)$ 的一个充分统计量是 (T_1, T_2)，其中

$$T_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{6.71a}$$

和

$$T_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{6.71b}$$

为了说明这一点，我们将$p_\theta(\mathbf{x})$写为

$$p_\theta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\theta_2)^{n/2}} \exp\left\{\frac{1}{2\theta_2}\left[t_2 - 2\theta_1 t_1 + n\theta_1^2\right]\right\} \tag{6.72}$$

其中$t_1 = T_1(\mathbf{x})$和$t_2 = T_2(\mathbf{x})$是T_1和T_2在$\mathbf{x}$点上的值。于是可以看出来$p_\theta(\mathbf{x})$仅仅通过$[T_1(\mathbf{x}), T_2(\mathbf{x})]$才依赖于$\mathbf{x}$，并且$h(\mathbf{x}) = 1$，$g_\theta(\mathbf{x}) = p_\theta(\mathbf{x})$，所以$(T_1, T_2)$是$\theta = (\theta_1, \theta_2)$的充分统计量。

充分统计量的效应，在于它能以最紧凑的形式集中表现出蕴含于统计资料中的信息，从而使检定大为简化。如上面提到的在检定随机变数的均值时，观察到的序次是无关紧要的。故我们可以认为检定问题关于样本的排列是对称的。由于很多统计检定问题呈现对称性，所以要求所用的统计手续具有对称性的条件。例如要检定这样的假设：六年级的男孩高于女孩

时，一个好的检定应当与我们选用的度量尺度无关。即当我们用"寸"度量接受了此假设时，则当我们改用"厘米"度量时也应该接受此假设。对这个问题来说"好"检定的含义，应该是当尺度适当改变的时候，检定的结论应该保持不变。

三、样本空间$\mathscr{X}$的变换群$\mathscr{G}$

对称的数学表达式在某些变换群之下是不变的，设$\mathscr{X}$是实验的样本空间，g是$\mathscr{X}$的变换。假设g是将$\mathscr{X}$映射到自身的1-1映射，若X为一随机变数，gX是当$X=\mathbf{x}$时取值$g(\mathbf{x})$的随机变数。假设对于$\theta\in\Omega$，X的分布为P_θ，gX的分布是$P_{\theta'}$，$\theta'\in\Omega$。则可以认为$\mathscr{X}$上的运算g诱导出Ω上的一个运算$\bar{g}$。若当$\theta\in\Omega$时$\bar{g}\theta\in\Omega$，而且对任一$\theta'\in\Omega$若都存在$\theta\in\Omega$使$\bar{g}\,\theta=\theta'$，则称参数集Ω在$\bar{g}$之下是不变的。记为

$$\bar{g}\ \Omega=\Omega$$

若

$$\bar{g}\,\Omega=\Omega$$

$$\bar{g}\,\Omega_0=\Omega_0$$

则称针对H_1：$\theta\in\Omega_1$的假设H_0：$\theta\in\Omega_0$的检定问题在变换g之下是保持不变的。即整个参数空间和假设参数空间在样本空间上的变换g之下是不变的。我们可以定义一个满足下列条件的变换群$\mathscr{G}$：若g与g'属于$\mathscr{G}$，则$g'gX=g'(g(X))$，$g\ (g^{-1}X)=X$对于一切$X\in\mathscr{X}$成立。不难证明$\mathscr{G}$在参数空间Ω上导出一个变换群$\bar{\mathscr{G}}$。假设针对H_1检定H_0的问题在$\mathscr{G}$中任一g之下保持不变，则称此检定问题在$\mathscr{G}$之下保持不变。

若已给变换群$\mathscr{G}$，我们来讨论样本空间$\mathscr{X}$的某些点的等价性。如在例题6.9中所考虑的问题里，使

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad 和 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

为常数的一切点，对于检定问题可以视为等价的。确切地说，在$\mathscr{G}$之下的两个点$\mathbf{x}_1$和$\mathbf{x}_2$称为等价，系指存在一个$g\in\mathscr{G}$，使$\mathbf{x}_1=g\mathbf{x}_2$。等价性以符号$\mathbf{x}_1\sim\mathbf{x}_2\ (\mathrm{mod}\mathscr{G})$表示之。对于例6.9，由某点$\mathbf{x}_1$将其分量作任意排列所得的点设为$\mathbf{x}_2$，则充分统计量$(T_1,\ T_2)$对于$\mathbf{x}_1$和$\mathbf{x}_2$都取同一值。所以$(T_1,\ T_2)$在诸$x_i$的排列之下保持不变。在一般情况下，函数$T$若满足下列条件，则称为在$\mathscr{G}$之下的不变量：对一切$\mathbf{x}\in\mathscr{X}$和一切$\hat{\mathbf{x}}\sim\mathbf{x}\ (\mathrm{mod}\mathscr{G})$

$$T(\mathbf{x})=T(\hat{\mathbf{x}})$$

换言之，若一个函数对于所有等价的点取同一值时，称为不变的。这样一个函数在解决检定问题时是很重要的。函数T的另一性质是对于非等价的两个点有不同的值。即这个函数对于等价点集取唯一的值。若函数T满足下列条件时，称为**最大不变量**：

T是不变的而且由

$$T(\mathbf{x})=T\ \ (\hat{\mathbf{x}})$$

可推出$\hat{\mathbf{x}}=g\mathbf{x}$对某一$g\in\mathscr{G}$成立。最大不变量的重要性，总结在下列定理之中。

定理6.2：设$T(\mathbf{x})$是关于变换群$\mathscr{G}$的最大不变量，则检定在$\mathscr{G}$之下不变的充分必要条件是仅仅通过$T(\mathbf{x})$与$\mathbf{x}$相关。

为了说明这些概念，请看下列例子。

例6.10：设$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\mathscr{G}$是由变换

$$g(x)=(x_1+c,\ x_2+c,\cdots,\ x_n+c),\qquad -\infty<c<+\infty$$

所构成的群。令$T(\mathbf{x})=(x_1-x_n,\ x_2-x_n,\cdots,x_{n-1}-x_n)$。显然$T$在$\mathscr{G}$之下是不变的,因为

$T[g(\mathbf{x})]=[(x_1+c)-(x_n+c),(x_2+c)-(x_n+c),\cdots,(x_{n-1}+c)-(x_n+c)]=(x_1-x_n,x_2-x_n,\cdots,x_{n-1}-x_n)$。假设$x_i'-x_n'=x_i-x_n$, $i=1,2,\cdots,n-1$,则当取$x_n'-x_n=c$时,我们得$x_n'=x_n+c$, 所以$x_i'=x_i+c$, $i=1,2,\cdots,n$。故$T(\mathbf{x})$也是一个最大不变量。

例6.11: 设$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,倘若是检定假设

H_0: X的密度是$f_0(x_1-\theta,\cdots,x_n-\theta)$

针对假设为H_1: X的密度是$f_1(x_1-\theta,\cdots,x_n-\theta)$, 其中$\theta$有限。设群$\mathscr{G}$是由变换

$$g(\mathbf{x})=(x_1+c,\cdots,x_n+c)$$

对一切有限之c构成的。在$\mathscr{G}$之下针对H_1检定H_0的问题是不变的。在参数空间中$g(\mathbf{x})$导出变换

$$\bar{g}\,\theta=\theta+c$$

由例6.10在$\mathscr{G}$之下的最大不变量是$T=(X_1-X_n,\cdots,X_{n-1}-X_n)$。$T$的分布与$\theta$无关,并且在$H_i$之下其密度为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t_1+z,\cdots,t_{n-1}+z,z)\,dz, \qquad i=0,1$$

若在$T(\mathbf{x})$的基础上针对H_1检定H_0, 就是针对单一其它假设来检定单一假设, 并按照*Neyman-Pearson*引理可知一致最大功效检定的否定区域为:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t_1+z,\cdots,t_{n-1}+z,z)\,dz}{\int_{-\infty}^{\infty} f_0(t_1+z,\cdots,t_{n-1}+z,z)\,dz}>\hat{K}$$

现在回到最初的问题, 即针对其它假设$\hat{\mathrm{H}}_1$: $\xi/\sigma<\theta_0$, 检定假设$\hat{\mathrm{H}}_0$: $\xi/\sigma\geqslant\theta_0$, 其中$\xi$和$\sigma$是互独立同分布随机变数$\hat{\tau}_{s,t}(i)=\tau_{s,t}(i)-r_{s,t}$, $(i=1,2,\cdots,N)$的均值和方差。兹将针对$\hat{\mathrm{H}}_1$检定$\hat{\mathrm{H}}_0$的解法概述如下: 在得到观察结果$\hat{\tau}_{s,t}(i)=\tau_{s,t}(i)-r_{s,t}$后,检定$\hat{\mathrm{H}}_0$时我们仅需要两个变数。

$$\overline{M}(N)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\tau}_{s,t}(i)$$

和

$$S=\left[\sum_{i=1}^{N}(\hat{\tau}_{s,t}(i)-\overline{M})^2\right]^{1/2}$$

它们是互独立的, 而且是(ξ,σ)的充分统计量。再者, 可以证明$\overline{M}$的分布是$N(\xi,\sigma^2/N)$, $\nu=S/\sigma$的密度$h(u)$是

$$h(u)=\begin{cases}\dfrac{N^{\frac{N-1}{2}}\cdot u^{N-2}\cdot\exp\{-nu^2/2\}}{2^{\frac{N-3}{2}}\cdot\Gamma\left(\dfrac{N-1}{2}\right)}, & 若\ u>0,\\ 0 & 若\ u\leqslant 0。\end{cases}$$

$\overline{M}/S$是仅依赖于参数$\theta=\xi/\sigma$的充分统计量。事实上，$\overline{M}/S$这个统计量或等价地

$$T=\frac{\sqrt{N}\ \overline{M}(N)}{S\sqrt{N-1}}$$

是在变换群$\mathscr{G}$（用正的常数β乘$\overline{M}$和S）之下的最大不变量。换言之，若

$$\hat{\tau}_{s,t}=\left(\hat{\tau}_{s,t}(1),\cdots,\hat{\tau}_{s,t}(N)\right),\ g\in\mathscr{G}$$

则
$$g(\hat{\tau}_{s,t})=\left(\beta\ \hat{\tau}_{s,t}(1),\cdots,\beta\ \hat{\tau}_{s,t}(N)\right),\qquad \beta>0,$$

$$\overline{M}\left(g(\hat{\tau}_{s,t})\right)=\beta\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\tau}_{s,t}(i)=\beta\overline{M}(\hat{\tau}_{s,t}),$$

$$S\left(g(\hat{\tau}_{s,t})\right)=\left[\sum_{i=1}^{N}(\beta\ \hat{\tau}_{s,t}(i)-\beta\overline{M}(\hat{\tau}_{s,t}))^2\right]^{1/2}=\beta S(\hat{\tau}_{s,t}),$$

和

$$T\left(g(\hat{\tau}_{s,t})\right)=\frac{\sqrt{N}\ \overline{M}(g(\hat{\tau}_{s,t}))}{S(g(\hat{\tau}_{s,t}))/\sqrt{N-1}}$$
$$=\frac{\beta\sqrt{N}\ \overline{M}(\hat{\tau}_{s,t})}{\beta S(\hat{\tau}_{s,t})/\sqrt{N-1}}=T(\hat{\tau}_{s,t})$$

$\mathscr{G}$在参数空间(ξ,σ)上诱导出一个变换群$\overline{\mathscr{G}}$，使$\overline{g}\in\overline{\mathscr{G}}$时有

$$\overline{g}(\xi,\sigma)=(\beta\xi,\beta\sigma)$$

然而，关于参数$\theta=\xi/\sigma$的空间，$\overline{\mathscr{G}}$使问题保持不变。原始假设也保持不变，因为

$$\Phi\left(\frac{r_{s,t}-\nu_t(q)}{\sigma}\right)=\Phi\left(-\frac{\xi}{\sigma}\right)=\Phi\left(-\frac{\beta\xi}{\beta\sigma}\right)$$

由此推出，把检定问题限制在这样的场合是合理的：在$\mathscr{G}$之下检定保持不变。或者说只讨论这样的问题：仅通过$T(\hat{\tau}_{s,t})$依赖于$\hat{\tau}_{s,t}(1)$，$\hat{\tau}_{s,t}(2)$，…，$\hat{\tau}_{s,t}(N)$。

令$\delta=\sqrt{N}\theta$，随机变数T的概率密度$p_\delta(t)$可以证明为

$$p_\delta(t)=\left[2^{\frac{N}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)\cdot\sqrt{\pi(N-1)}\right]^{-1}\cdot\int_0^\infty\exp\left[-\frac{1}{2}\left(t\sqrt{\frac{\omega}{N-1}}-\delta\right)^2\right]\omega^{\frac{N-2}{2}}\exp\left(\frac{-\omega}{2}\right)d\omega$$

T的这个分布叫作具有$N-1$个自由度的非中心的学生分布。

作比值

$$\Lambda(t)=\frac{\int_0^\infty\exp\left[-\frac{1}{2}\left(t\sqrt{\frac{\omega}{N-1}}-\delta_1\right)^2\right]\omega^{\frac{N-2}{2}}\exp\left(-\frac{\omega}{2}\right)d\omega}{\int_0^\infty\exp\left[-\frac{1}{2}\left(t\sqrt{\frac{\omega}{N-1}}-\delta_0\right)^2\right]\omega^{\frac{N-2}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{\omega}{2}\right)d\omega}$$

可以证明当$\delta_0<\delta_1$时，$\Lambda(t)$为t的增函数。这表明概率密度族$\{p_\delta(t): -\infty<\delta<\infty\}$构成一个所谓的单调似然比族。比值$\Lambda(t)$是已知$\delta=\delta_1$时$T(\hat{\tau}_{s,t})$的联合密度，与$\delta=\delta_0$时$T(\hat{\tau}_{s,t})$的联合密度之比。由Neyman-Pearson引理，针对其它假设H_1^*：$\delta=\delta_1<\delta_0$，检定H_0^*：$\delta=\delta_0$的最大功效检定是，当$\Lambda(t)\leqslant\hat{K}$时否定$H_0^*$，当$\Lambda(t)>\hat{K}$时接受$H_0^*$。然而因为密度族$\{p_\delta(t): -\infty<\delta<+\infty\}$为单调似然比族，故可以证明此检定为一致最大功效的。用原始的变数，考虑水平为α的一致最大功效不变量的检定

H_0：$P\{\tau_{s,t}\geqslant r_{s,t}\}\geqslant p_0$

针对假设　H_1：$P\{\tau_{s,t}<r_{s,t}\}<p_0$

若下式成立此检定就否定H_0：

$$\frac{\sqrt{N}\,(\overline{M}(N)-r_{s,t})}{\left[\sum_{i=1}^{N}(\tau_{s,t}(i)-\overline{M}(N))^2/(N-1)\right]^{1/2}}\leqslant\hat{K}$$

若下式成立则接受H_0：

$$\frac{\sqrt{N}(\overline{M}(N)-r_{s,t})}{\left[\sum_{i=1}^{N}(\tau_{s,t}(i)-\overline{M}(N)^2/(N-1)\right]^{1/2}}>\hat{K}$$

此处$\overline{M}(N)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tau_{s,t}(i)$。常数$\hat{K}$由下式确定：

$$\int_{-\infty}^{\hat{K}} p_{\delta 0}(t)\,dt=\alpha$$

将$p_{\delta 0}(t)$之表达式代入上式得约束条件

$$\int_{-\infty}^{\hat{K}}\left[\int_0^{\infty}\omega^{\frac{N-2}{2}}\cdot\exp\left(\frac{-\omega}{2}\right)\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\left(t\sqrt{\frac{\omega}{N-1}}-\delta_0\right)^2\right]d\omega\right]dt$$
$$=\alpha\cdot 2^{\frac{N}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)\cdot\sqrt{\pi(N-1)}$$

故为了求$\hat{K}$必须计算上式左端的积分。如上所述，$p_\delta(t)$是具$N-1$个自由度的非中心的学生分布t的概率密度。一个良好的逼近为

$$\int_{-\infty}^{t} p_\delta(t)\,dt\approx P\left\{\chi<\frac{t\left[1-\frac{1}{4(N-1)}\right]-\delta}{\left[1+\frac{t^2}{2(N-1)}\right]^{1/2}}\right\}$$

其中χ为标准正态变元。将此近似式用于约束条件中得

$$\alpha=P\left\{\chi<\frac{\hat{K}\left[1-\frac{1}{4(N-1)}\right]-\delta}{\left[1+\frac{\hat{K}^2}{2(N-1)}\right]^{1/2}}\right\}$$

所以，解下列二次方程可以近似地求出$\hat{K}$：

$$\hat{K}^2\left[\left(1-\frac{1}{4(N-1)}\right)^2-\frac{[\Phi^{-1}(\alpha)]^2}{2(N-1)}\right]-2\delta\left[1-\frac{1}{4(N-1)}\right]\hat{K}+\delta^2-[\Phi^{-1}(\alpha)]^2=0$$

其中$\delta=-\sqrt{N}\Phi^{-1}(1-p_0)$。在解上列方程时必须慎重选择作为$\hat{K}$之值的根。另一根对应于$\alpha'=1-\alpha$（较小的根与$\alpha$和$\alpha'=1-\alpha$中较小的相对应）。

习　　题

1. 设G为图6—13所示，假设边e_i上的容量c_i是独立卜阿松变数，其强度为λ：

$$P\{c_i=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\qquad k=0,1,2,\cdots,\qquad i=1,2,3。$$

问 a）求割集的相关矩阵；

b）求$P\{\tau_{2,3}\geqslant K\}$；

c）求$P\{\min\limits_{i,j}\{\tau_{i,j}\}\geqslant K\}$。

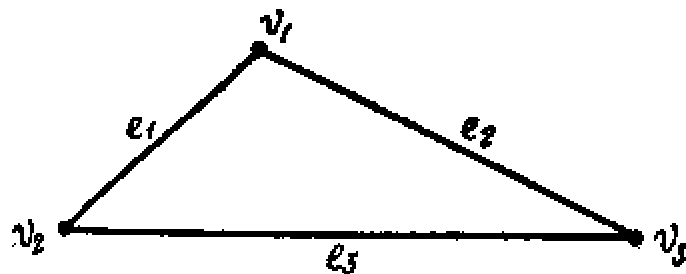


图 6—13

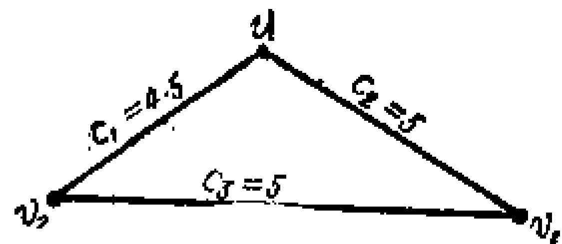


图 6—14

2. 设G为图6—14所示，假设每一条边e_i上有一随机流F_i，它的方差为1，而且流的联合分布是一个三维正态分布，均值矢量为$\mu=\{3,3,3\}$，相关矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

令$d_i=c_i-F_i$，（$i=1,2,3$），问：

a）当G的边容量取C_1，C_2和C_3时，求割集矢的概率分布；

b）用积分关系表示$P\{\tau_{2,3}\geqslant 3\}$；

c）利用二元正态分布表计算b）项的积分；

d）用第六节的方法求$\min\{\tau_{1,2},\tau_{1,3},\tau_{2,3}\}$和$\tau_{2,3}$的均值和方差的近似值。并由此计算$P\{\tau_{2,3}\geqslant 3\}$和$P\{\min\limits_{i,j}\{\tau_{i,j}\}\geqslant 3\}$。

第七章　最小费用、最优定址问题

第一节　最小费用流

一、基本概念

在讨论极大流的时候并没有考虑费用问题。只要补充一些与费用有关的概念，就可以利用最短路径方法，在保证极小费用的前提下把流极大化，这就是本节的目的。首先介绍有关概念，接着提出单位链最小费用方法，并通过例子对此方法的使用加以说明。最后来论证此方法的正确性并加以推广。在本节我们只讨论有向图G(V,U)。

定义7.1： 设$h(i,j)$为流经弧(i,j)的单位流量的费用，则称

$$h(G;\ \mathscr{F})=\sum_{(i,j)\in U} h(i,j)\cdot f(i,j) \tag{7.1}$$

为图G上通过流$\mathscr{F}$的**费用**。在不致混淆的情况下，将$h(G;\ \mathscr{F})$略记为$h(\mathscr{F})$。

在以前讨论网上的流时，并未排除$f(i,j)$与$f(j,i)$同时为正的情况，即允许$f(i,j)\cdot f(j,i)>0$。显然这种对流现象在讨论最小费用时是应当排除的。所以当$f(i,j)-f(j,i)>0$时，就用$g(i,j)=f(i,j)-f(j,i)$，和$g(j,i)=0$来代替$f(i,j)$和$f(j,i)$。称后一个流$\mathscr{G}$为无对流的流。我们在把流$\mathscr{F}$改造为无对流流$\mathscr{G}$时，流的守恒性和相容性显然是保持的，但费用则是降低了。故以下总设流满足以下性质。

性质7.1： 若$(i,j)\in U$，则恒有$f(i,j)\cdot f(j,i)=0$。即或者是$f(i,j)\neq 0$，或者是$f(j,i)\neq 0$，但二者不能同时成立。

有了这些准备，就可以进一步定义流的保形概念。

定义7.2： 设流$\mathscr{F}$与$\mathscr{G}$流经弧(i,j)的量，分别为$f(i,j)$与$g(i,j)$，若对于任一弧$(i,j)\in U$，由$f(i,j)>0$可断言$g(j,i)=0$，则称流$\mathscr{F}$与$\mathscr{G}$是**保形的**。

这里须指出流的保形概念是对称的但不是可递的。即当$\mathscr{F}$与$\mathscr{G}$是两个保形流；$\mathscr{G}$与$\mathscr{H}$也是保形的，但$\mathscr{F}$与$\mathscr{H}$可以不是保形的。为了说明这一点请看下例。

例7.1： 在图7—1中$\mathscr{F}$与$\mathscr{G}$、$\mathscr{G}$与$\mathscr{H}$均为保形的。流经弧(i,j)的量分别记为$f(i,j)$，$g(i,j)$和$h(i,j)$，然而$\mathscr{F}$与$\mathscr{H}$却不是保形的。这只要指出$f(2,3)\cdot h(3,2)>0$就够了。

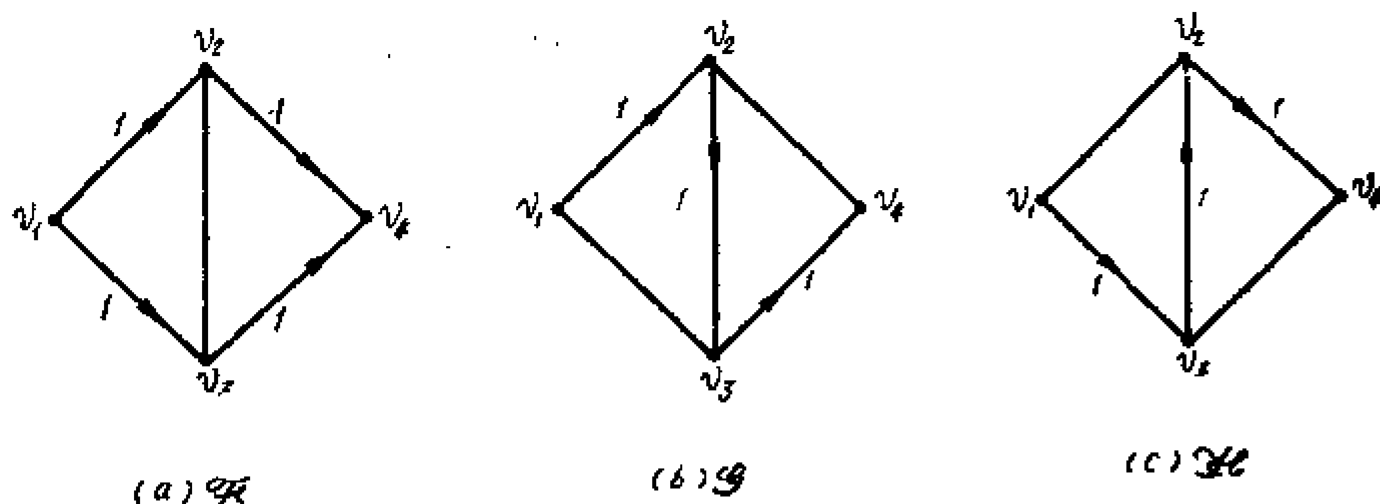


图7—1　保形不可递

保形概念可作如下推广。

定义7.3：若流 $\mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_2$，…，$\mathscr{F}_k$ 中任意两个流均为保形的，则称此 k 个流为保形的。

流的保形概念在最小费用方法中是很重要的。为了应用最短路径方法来解决最小费用问题，尚须给出弧的有效长概念。

定义7.4：对于弧 $(i,j)\in U$，由下列式子所定义的 $u(i,j)$ 及 $\Delta(i,j)$ 分别称为弧 (i,j) 上增加和减少单位流量的**增值和减值**：

$$u(i,j)=\begin{cases}h(i,j) & \text{若 } 0\leqslant f(i,j)<C(i,j)\text{，且 } f(j,i)=0 \quad (7.2a)\\ \infty & \text{否则} \quad (7.2b)\end{cases}$$

$$\Delta(i,j)=\begin{cases}-h(i,j) & \text{若 } f(j,i)>0 \quad (7.3a)\\ \infty & \text{否则} \quad (7.3b)\end{cases}$$

其中 $h(i,j)$ 由定义7.1所定义。

由定义可见 (i,j) 弧上的增值就是在 (i,j) 上增加单位流量时的费用；减值为在 (i,j) 上还原单位流的费用（为负值）。

定义7.5：弧 (i,j) 关于流 $\mathscr{F}$ 和 $s-t$ 链 π 的**有效长度** $l(i,j)$ 系指

$$l(i,j)=\begin{cases}u(i,j) & \text{若 } f(i,j)\text{ 为 }\pi\text{ 上的向前流}\\ \Delta(i,j) & \text{若 } f(i,j)\text{ 为 }\pi\text{ 上的向后流}\end{cases}$$

特别需要指出的是，有效长度的概念依赖于流和链，故在计算时，每当流有所变化都要重新计算。因此，为了准确和醒目，我们常将 $l(i,j)$ 写为 $l((i,j);\mathscr{F})$，链 π 的有效长度表示为 $l(\pi;\mathscr{F})=\sum\limits_{(i,j)\in\pi}l((i,j);\mathscr{F})$。还要指出的是弧的有效长度取决于它在链上是向前的抑或是向后的。最后，若某弧 (i,j) 的有效长度为无限时，表示 $f(i,j)$ 不再变了。因为这时在 (i,j) 上或是向前流已饱和或是无向后流。

二、单位链最小费用流方法

第一步：随便指定一个最小费用的可行 $s-t$ 流 $\mathscr{F}$，（在各弧上都是0的流就是一个最小费用的可行流）；

第二步：应用最短路径方法，找一个具有最短(有效）长度 $l(\pi_i;\mathscr{F}_i)$ 的 $s-t$ 链 π_i(因为 $\mathscr{F}_i$ 是最小费用的，故没有负长度的回路，所以可以使用最短路径方法）。若不存在有限长的 $s-t$ 链，则方法停止。否则进入第三步；

第三步：构造一个流 $\mathscr{F}_{i+1}=\mathscr{F}_i+1(\pi_i)$。用 $i+1$ 代 i 并转回到第二步。

我们首先用一个例子说明上列方法的用法，而后在第三段再来证明此方法的正确性。

例7.2：见图7—2（a），设 $\mathscr{F}_i$ 为它上面的一个流，在每条弧上所列五个数分别表示：$c(k,j)$，$f(k,j)$，$h(k,j)$，$u(k,j)$ 和 $\Delta(k,j)$。由有效长度的定义7.5，按最短路径方法得到的最短 $s-t$ 增值链为 v_s，v_2,v_1,v_t。由单位链最小费用流方法的第三步所得到的 $\mathscr{F}_{i+1}$ 表示在图7—2（b）中。

三、单位链最小费用方法的证明

定理7.1：可行流 $\mathscr{F}$ 最大的充分必要条件是，对于每一个 $s-t$ 链 π_{s-t}，总有

$$l(\pi_{s-t};\mathscr{F})=\infty$$

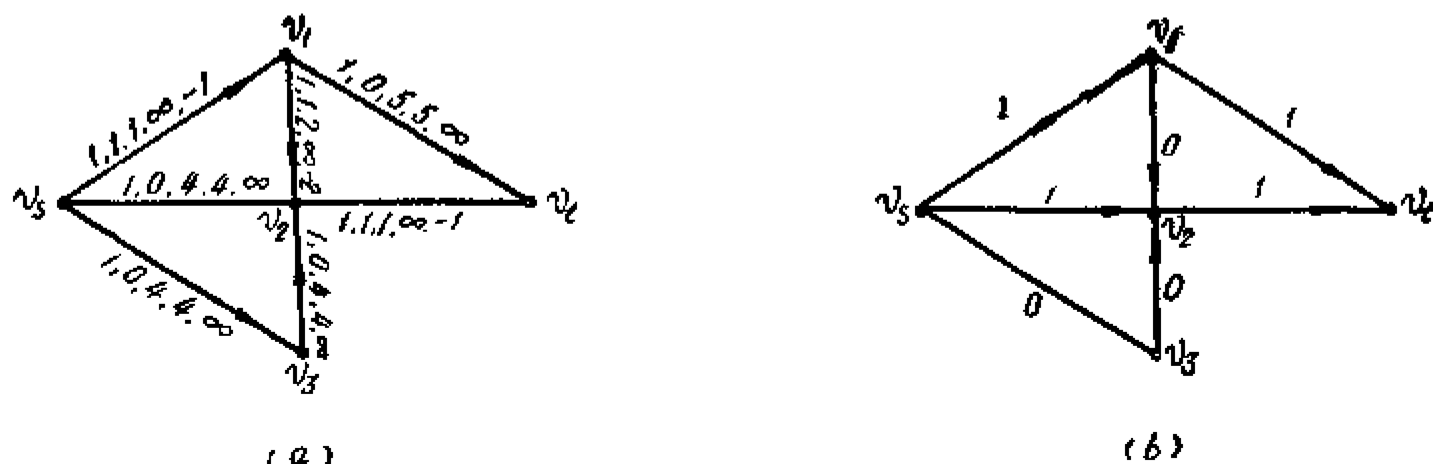


图7－2 最小费用方法

证明：若$l(\pi;\ \mathscr{F})$为有限，则π的所有向前弧均不饱和，也没有向后弧是空闲的。所以在π的每一条弧上至少可以改变一个单位的流，故当$l(\pi;\ \mathscr{F})$有限时，$\mathscr{F}+1(\pi)$是可行的。反之，若$\mathscr{F}+1(\pi)$是可行的、π的向前弧都不饱和、向后弧均非空，则$l(\pi;\ \mathscr{F})$为有限的。

引理7.1：若$\mathscr{F}$为可行$s-t$流，$\mathscr{G}_1$，$\mathscr{G}_2$，…，$\mathscr{G}_k$为保形$s-t$流，且

$$\mathscr{G}_1+\mathscr{G}_2+\cdots,\ +\mathscr{G}_k+\mathscr{F}$$

为一可行流，则$\mathscr{F}+\mathscr{S}$也是可行的，其中$\mathscr{S}=\mathscr{G}_{i_1}+\mathscr{G}_{i_2}+\cdots+\mathscr{G}_{i_j}$，$\{\mathscr{G}_{i_l};\ l=1,2,\cdots,j\}$为$\{\mathscr{G}_i;\ i=1,2,\ \cdots,k\}$的任一子集。

证明：对于弧(i,j)，令$\hat{f}=f(i,j)-f(j,i)$，$\hat{s}=s(i,j)-s(j,i)$，$\hat{g}_k=g_k(i,j)-g_k(j,i)$，则下列二式之一必成立

$$\hat{f}\leqslant\hat{f}+\hat{s}\leqslant\hat{f}+\hat{g}_1+\hat{g}_2+\cdots+\hat{g}_k \tag{7.4}$$

$$\hat{f}+\hat{g}_1+\hat{g}_2+\cdots+\hat{g}_k\leqslant\hat{f}+\hat{s}\leqslant\hat{f} \tag{7.5}$$

由可行性推知

$$-c(j,i)\leqslant\ \hat{f}\leqslant c(i,j) \tag{7.6}$$

和

$$-c(j,i)\leqslant\hat{f}+\hat{g}_1+\hat{g}_2+\cdots+\ \hat{g}_k\leqslant c(i,j) \tag{7.7}$$

所以

$$-c(j,i)\leqslant\hat{f}+\hat{s}\leqslant c(i,j)$$

由于(i,j)的任意性，上式表明$\mathscr{F}+\mathscr{S}$为可行的。

引理7.2：对于一个具有非负单价的网，若$\mathscr{F}$，$\mathscr{G}$和$\mathscr{K}$为s-t流，且$\mathscr{G}$和$\mathscr{K}$为保形的，则

$$h(\mathscr{F}+\mathscr{G}+\mathscr{K})-h(\mathscr{F}+\mathscr{G})\geqslant h(\mathscr{F}+\mathscr{K})-h(\mathscr{F}) \tag{7.8}$$

证明：令

$$Q=h(\mathscr{F}+\mathscr{G}+\mathscr{K})-h(\mathscr{F}+\mathscr{G})-h(\mathscr{F}+\mathscr{K})+h(\mathscr{F}) \tag{7.9}$$

将证明在所设条件下$Q\geqslant 0$。为此对任一弧(i,j)令$\hat{f}=f(i,j)-f(j,i)$，$\hat{g}=g(i,j)-g(j,i)$，$\hat{k}=k(i,j)-k(j,i)$，并定义$Q(i,j)$：

$$Q(i,j)=|\hat{f}+\hat{g}+\hat{k}|\cdot\overline{h}(i,j)-|\hat{f}+\hat{g}|\cdot\overline{h}(i,j) \\ -|\hat{f}+\hat{k}|\cdot\overline{h}(i,j)+|\hat{f}|\ \overline{h}(i,j) \tag{7.10}$$

其中 $\overline{h}(i,j)=\begin{cases}h(i,j) & \text{若}\quad \overline{h}(i,j)\text{之系数流在}(i,j)\text{方向}\\ h(j,i) & \text{若}\quad \overline{h}(i,j)\text{之系数流在}(j,i)\text{方向}\end{cases}$

因此只需证明$Q(i,j)\geqslant 0$，不失一般性，假设$\hat{f}(i,j)>0$。故以下二式之一必成立（因为$\mathscr{G}$和$\mathscr{K}$是保形的）：

$$\hat{f}(i,j)\geqslant 0,\quad \hat{g}(i,j)\geqslant 0,\quad \hat{k}(i,j)\geqslant 0。\tag{7.11}$$

$$\hat{f}(i,j)\geqslant 0,\quad \hat{g}(j,i)\geqslant 0,\quad \hat{k}(j,i)\geqslant 0\tag{7.12}$$

若式(7.11)成立，则有

$$Q(i,j)=[\hat{f}(i,j)+\hat{g}(i,j)+\hat{k}(i,j)]h(i,j)-[\hat{f}(i,j)+\hat{g}(i,j)]h(i,j)$$
$$-[\hat{f}(i,j)+\hat{k}(i,j)]h(i,j)+\hat{f}(i,j)h(i,j)=0$$

从而引理成立。

若式（7.12）成立，且 $$\hat{f}(i,j)-\hat{g}(j,i)-\hat{k}(j,i)\geqslant 0\tag{7.13}$$

则更有 $$\hat{f}(i,j)-\hat{g}(j,i)\geqslant 0\tag{7.14a}$$

和 $$\hat{f}(i,j)-\hat{k}(j,i)\geqslant 0\tag{7.14b}$$

则此时$Q(i,j)$也为0。

其它唯一可能情况是式（7.12）成立且$\hat{f}(i,j)-\hat{g}(j,i)-\hat{k}(j,i)<0$。在这种情况下，$Q(i,j)$取下列形式之一：

$$-[\hat{f}+\hat{g}+\hat{k}]h(j,i)-[\hat{f}+\hat{g}]h(i,j)-[\hat{f}+k]h(i,j)+[\hat{f}]h(i,j)\tag{7.15}$$

$$-[\hat{f}+\hat{g}+\hat{k}]h(j,i)+[\hat{f}+\hat{g}]h(j,i)-[\hat{f}+\hat{k}]h(i,j)+[\hat{f}]h(i,j)\tag{7.16}$$

$$-[\hat{f}+\hat{g}+\hat{k}]h(j,i)-[\hat{f}+\hat{g}]h(i,j)+[\hat{f}+\hat{k}]h(j,i)+[\hat{f}]h(i,j)\tag{7.17}$$

$$-[\hat{f}+\hat{g}+\hat{k}]h(j,i)+[\hat{f}+\hat{g}]h(j,i)+[\hat{f}+\hat{k}]h(j,i)+[\hat{f}]h(i,j)\tag{7.18}$$

而后将上式依次化简为：

$$-[\hat{f}+\hat{g}+\hat{k}]\cdot[h(i,j)+h(j,i)]\tag{7.19}$$

$$-[\hat{k}]\cdot[h(i,j)+h(j,i)]\tag{7.20}$$

$$-[\hat{g}]\cdot[h(i,j)+h(j,i)]\tag{7.21}$$

$$[\hat{f}]\cdot[h(i,j)+h(j,i)]\tag{7.22}$$

由式（7.11）、（7.12）和

$$\hat{f}+\hat{g}+\hat{k}<0$$

与 $$h(i,j)+h(j,i)\geqslant 0$$

可知式（7.19）～（7.22）四个式子均为非负的。从而引理得证。

引理7.2的直观意义是附加流所增加的费用为非线性的，以下还要进一步讨论。

例7.3：用图7—3来说明引理7.2。在图7—3a中给出了流$\mathscr{F}$。而在（b）里给出了$\mathscr{G}=\mathscr{K}$。设对一切弧(i,j)，$h(i,j)=1$。

则$\mathscr{F}+\mathscr{G}=\mathscr{F}+\mathscr{K}$如图（$c$）所示，而$\mathscr{F}+\mathscr{G}+\mathscr{K}$如（$d$）图所示。故有

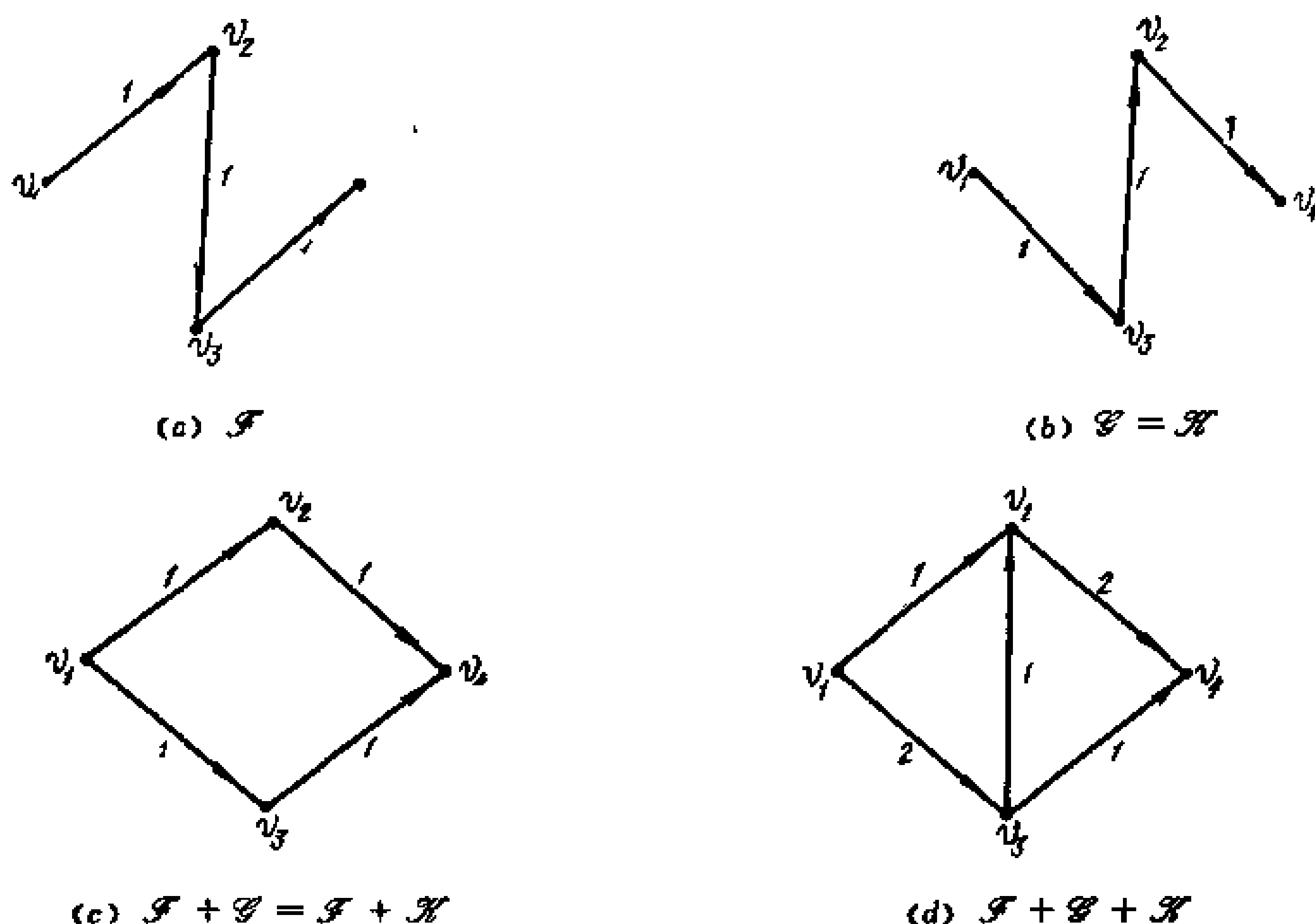
$$h(\mathscr{F}+\mathscr{G}+\mathscr{K})-h(\mathscr{F}+\mathscr{G})=7-4=3$$

和 $$h(\mathscr{F}+\mathscr{K})-h(\mathscr{F})=4-3=1$$

从而得

$$3=h(\mathscr{F}+\mathscr{G}+\mathscr{K})-h(\mathscr{F}+\mathscr{G})>h(\mathscr{F}+\mathscr{K})-h(\mathscr{F})=1$$

引理7.3：若$\mathscr{F}$为一个可行流，且π是一个使$l(\pi;\ \mathscr{F})$为有限的s-t路，则



(a) $\mathscr{F}$　(b) $\mathscr{G}=\mathscr{H}$

(c) $\mathscr{F}+\mathscr{G}=\mathscr{F}+\mathscr{H}$　(d) $\mathscr{F}+\mathscr{G}+\mathscr{H}$

图7－3　附加费用图

$$h[\mathscr{F}+1(\pi)]-h(\mathscr{F})=l(\pi;\ \mathscr{F})$$

证明：设(i,j)为π的向前弧，若$f(i,j)\geqslant 0$，则在(i,j)上与$\mathscr{F}+1(\pi)$相应的流为$f(i,j)+1$，且$h(\mathscr{F})$在此弧上的增量为$h(i,j)$。如若$f(i,j)>0$在向后弧上，则在(i,j)上与$\mathscr{F}+1(\pi)$相应的流为$f(i,j)-1$。所以$h(\mathscr{F})$在此弧上减少了$h(i,j)$。在任何情况下$h(\mathscr{F})$与(i,j)相对应的增量均为$l[(i,j);\ \mathscr{F}]$。故引理得证。

由以上三引理可证以下定理。

定理7.2：若$\mathscr{F}$是值为$f_{s,t}<\tau_{s,t}$的最小费用的$s-t$流。π为一个关于$\mathscr{F}$的最短$s-t$链，则$\mathscr{F}+1(\pi)$是一个值为$f_{s,t}+1$的最小费用的$s-t$流。

证明：设$\mathscr{G}$是一个值为$f_{s,t}+1$的最小费用的$s-t$流。由准路分解方法$\mathscr{G}-\mathscr{F}$可写为$1(\pi_1)+\mathscr{Z}_1$，其中π_1为一个$s-t$链，$\mathscr{Z}_1$是一个零型流，且$1(\pi_1)$和$\mathscr{Z}_1$为保形的。因为$\mathscr{F}+1(\pi_1)+\mathscr{Z}_1$是可行流，故由引理7.1可知$\mathscr{F}+1(\pi_1)$和$\mathscr{F}+\mathscr{Z}_1$也是可行的。所以由引理7.2得

$$h(\mathscr{G})-h[\mathscr{F}+1(\pi_1)]\geqslant h(\mathscr{F}+\mathscr{Z}_1)-h(\mathscr{F})$$

由于$\mathscr{F}+\mathscr{Z}_1$可行，且由假设$\mathscr{F}$为可行而且是最小费用的，故有

$$h(\mathscr{F}+\mathscr{Z}_1)-h(\mathscr{F})\geqslant 0$$

由以上二式得出

$$h(\mathscr{G})\geqslant h[\mathscr{F}+1(\pi_1)]$$

但由引理7.2知道$\mathscr{F}+1(\pi_1)$也是可行的、具有$f_{s,t}+1$值的流。故$\mathscr{F}+1(\pi_1)$也是最小弗用s-t可行流。从而π_1必使$l(\pi_1;\ \mathscr{F})$为最小。否则存在s-t链π_2使$l(\pi_2;\ \mathscr{F})<l(\pi_1;\ \mathscr{F})$，此时，引理7.3就要导致$h[\mathscr{F}+1(\pi_2)]<h[\mathscr{F}+1(\pi_1)]$，此与$\mathscr{G}$是最小费用相矛盾。设$\pi_i$是使$l(\pi_i;\mathscr{F})=l(\pi_1;\mathscr{F})$的任一$s$-$t$链，则由引理7.3得知$\mathscr{F}+1(\pi_i)$也是值为$f_{s,t}+1$的最小费用的$s-t$可行流。定理得证。

定理7.1和7.2论证了最小费用方法的正确性。综上可知，求最小费用的最大流，关键在于

按已知的具有值$f_{s,t}<\tau_{s,t}$的最小费用流$\mathscr{F}$，找出一个最短$s-t$链π,即具有最小费用的增值链。于是在保持最小费用的条件下，得到值为$f_{s,t}+1$的最小费用的流$\mathscr{F}+1(\pi)$。显然只要在π的向前弧上的向前流未达饱和，而向后流均为正的条件下，π作为关于流型的最短性就保持不变。

推论7.1：若$\mathscr{F}$是一个值为$k<\tau_{s,t}$的最小费用流，π是关于$\mathscr{F}$的最短$s-t$链，则$\mathscr{F}+a(\pi)$是一个值为$k+a$的最小费用流。其中$a=1,\ 2,\ \cdots,\ c(\pi_i)$。

证明：沿着π增加$a=1,\ 2,\cdots,c(\pi)$单位的流，所得的流$\mathscr{F}+a(\pi)$显然是可行的且有值$k+a$，也是最小费用的。倘若存在一条$s-t$链π'使

$$h[\mathscr{F}+a(\pi)]>h[\mathscr{F}+(a-1)\pi+1(\pi')]$$

则对于流$\mathscr{F}+(a-1)\pi$而言，π'比π更短。但对a的一切可能值，在π上附加单位流的弗用总是相同的，故对$\mathscr{F}$流应有$h[1(\pi')]<h[(1\pi)]$，此与π关于$\mathscr{F}$为最短矛盾。

四、推广

在上面我们定义$h(i,j)$为弧(i,j)上通过单位流的费用是一个常数，因此当弧上有流$f(i,j)$时，(i,j)弧的费用为$h(i,j)\cdot f(i,j)$。今设弧(i,j)的费用$h[f(i,j)]$依赖于流$f(i,j)$，且为$f(i,j)$的凸函数，满足条件：

若$f(i,j)=0$则$h[f(i,j)]=0$；并将$h[f(i,j)]$简记为$h(f)$。

这样一来就要从新定义增值和减值的概念：

$$u(i,j)=\begin{cases}h(f+1)-h(f) & \text{若 } 0\leqslant f(i,j)<c(i,j) \quad (7.23a)\\ \infty & \text{否则} \quad (7.23b)\end{cases}$$

$$\varDelta(i,j)=\begin{cases}-h(f)+h(f-1) & \text{若 } f(j,i)>0 \quad (7.24a)\\ \infty & \text{否则} \quad (7.24b)\end{cases}$$

须知我们曾要求增值非负、减值非正。对于上述推广仍然满足这些要求，为此只要细审凸函数$h(f)$的意义：

由凸函数定义，对于任二数$\lambda_1\geqslant 0$，$\lambda_2\geqslant 0$，当$\lambda_1+\lambda_2=1$时总有

$$h(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\leqslant\lambda_1 h(x_1)+\lambda_2 h(x_2) \tag{7.25}$$

令取

$$x_2=f+1,\ x_1=0,\ \lambda_2=f/(f+1),\ \lambda_1=1/(f+1)$$

则得

$$h(f)\leqslant\frac{f}{f+1}h(f+1)\leqslant h(f+1)$$

所以$h(f)\leqslant h(f+1)$，从而$u(i,j)$非负。这同时证明了$\varDelta(i,j)$非正。

关于有效长度的定义，在重新定义了$u(i,j)$及$\varDelta(i,j)$之后，有效长度在形式上与以前一样。对于推广了的单位路径最小费用方法的用法请看下列例子。

例7.4：在图7—4a中每一弧上所给之权为$a(i,j)$，弧(i,j)的费用函数为$a(i,j)f^2(i,j)$。并设各弧上的容量都是1，而在图7—4c上所给流为初始最小费用流。各弧上的增值和减值依序标在图7—4b上。在$(1,t)$弧上的增值是$5\cdot(1)^2-5\cdot(0)^2=5$。所以沿着由弧$(s,2)$，$(2,1)$及$(1,t)$增加一个单位的流，此路的有效长度为$4+(-2)+5=7$。最后所得流表示在图7—4$d$上。

为了证明用"单位链最小费用流方法"产生最小费用的整数流。我们看出唯一需要改动

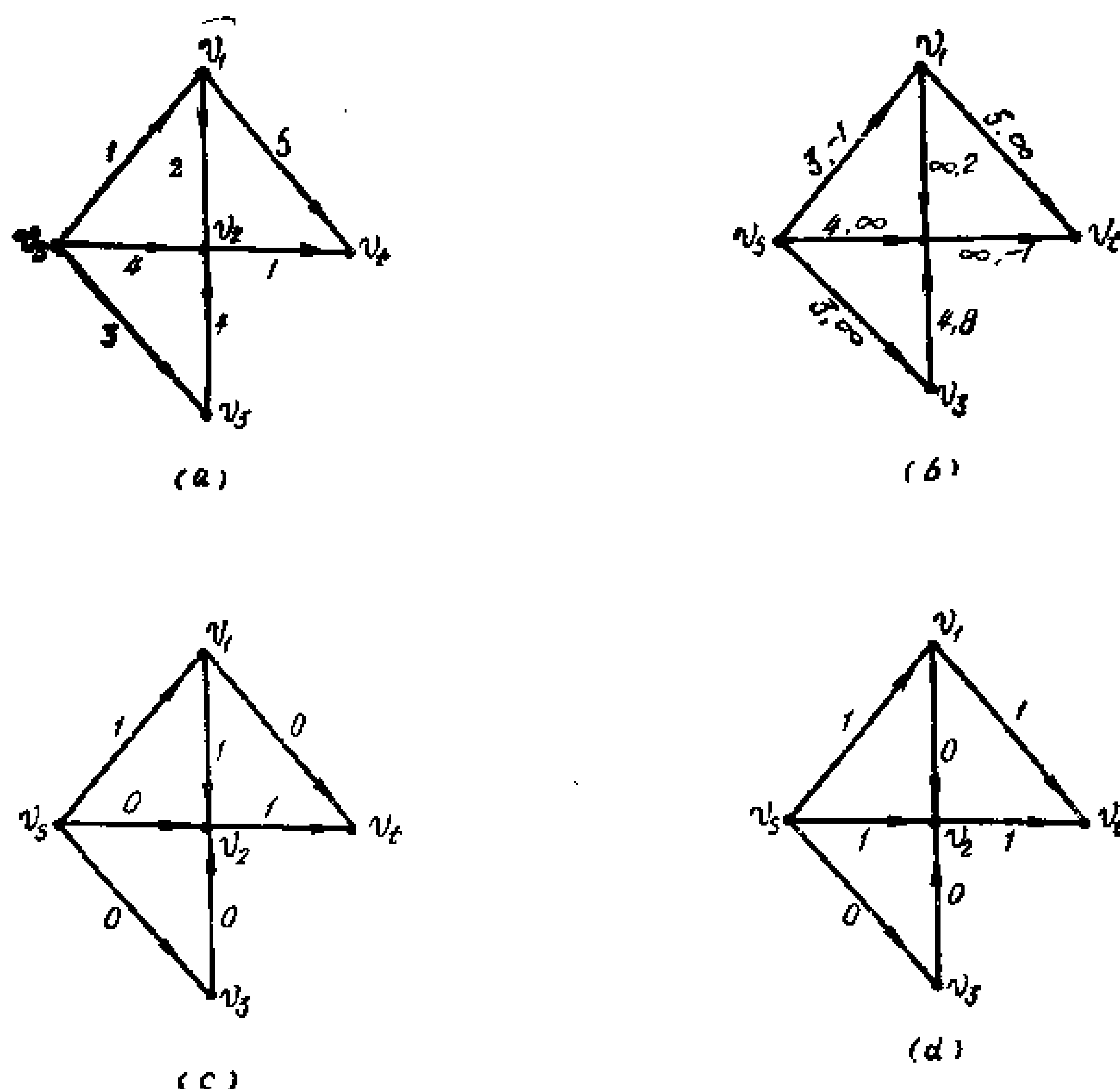


图7—4 凸函数费用图

的证明是引理7.2。

引理7.4：设定义在弧集U上的费用函数$h[f(i,j)]$是凸的，满足条件$h(0)=0$。若$\mathscr{F}$，$\mathscr{G}$和$\mathscr{K}$是$s-t$流，又$\mathscr{G}$和$\mathscr{K}$是保形的，则

$$h(\mathscr{F}+\mathscr{G}+\mathscr{K})-h(\mathscr{F}+\mathscr{G})\geqslant h(\mathscr{F}+\mathscr{K})-h(\mathscr{F})$$

证明：设$f(i,j)\geqslant 0$，$k(i,j)\geqslant g(i,j)$及$\mathscr{G}$与$\mathscr{K}$的保形性质，可知$g(i,j)\geqslant 0$，$k(i,j)\geqslant 0$或者$g(i,j)\leqslant 0$，$k(i,j)\leqslant 0$。

当$k(i,j)\geqslant g(i,j)\geqslant 0$时，$f\leqslant f+g\leqslant f+k\leqslant f+g+k$。由于$h(f)$的凸性，取$x_1=f$，$x_2=f+g+k$，$\lambda_1=\dfrac{g}{g+k}$，$\lambda_2=\dfrac{k}{g+k}$时。由公式（7.25）得

$$h(f+k)\leqslant\frac{g}{g+k}h(f)+\frac{k}{g+k}h(f+g+k) \tag{7.26}$$

若取 $x_1=f$，$x_2=f+g+k$，$\lambda_1=\dfrac{k}{g+k}$，$\lambda_2=\dfrac{g}{g+k}$，则由公式（7.25）得

$$h(f+g)\leqslant\frac{k}{g+k}h(f)+\frac{g}{g+k}h(f+g+k) \tag{7.27}$$

将式（7.26）与（7.27）相加得所欲证：

$$h(f+k)+h(f+g)\leqslant h(f)+h(f+g+k) \tag{7.28}$$

而当$g(i,j)\leqslant k(i,j)\leqslant 0$时，$f+g+k\leqslant f+g\leqslant f+k\leqslant f$，此时取 $x_1=f+g+k$，$x_2=f$，$\lambda_1=\dfrac{g}{g+k}$，$\lambda_2=\dfrac{k}{g+k}$，

另取 $x_1=f+g+k$，$x_2=f$，$\lambda_1=\frac{k}{g+k}$，$\lambda_2=\frac{g}{g+k}$，

将上列二式分别代入公式（7.25）之后相加，同样可得式（7.28），

即：

$$h(f+g+k)-h(f+g)\geqslant h(f+k)-h(f) \tag{7.29}$$

引理得证。

第二节　图上的距离

由图上两顶点间的路长概念，可导出图上任二顶点间的距离概念。我们在定义4.2中已有定义。这里结合有效长重复如下：

定义7.6：设 $\{\pi^1_{j,k},\ \cdots,\ \pi^q_{j,k}\}$ 是图上联接顶点v_j和v_k间的路径集合，则v_j与v_k间的距离$d(v_j,v_k)$定义为

$$d(v_j,v_k)=\min_{1\leqslant i\leqslant q}\left\{l(\pi^i_{j,k})\right\}$$

在不致混淆的条件下，将$d(v_j,v_k)$略作$d_{j,k}$。

对于无向图显然有$d_{j,k}=d_{k,j}$，而对于有向图则不能要求$d_{j,k}=d_{k,j}$。同时为了逻辑上的方便，约定$d(v_i,v_i)=d_{i,i}=0$。而当顶点v_j与v_k间无路径可达时，则约定 $d(v_j,v_k)=\infty$。

我们可以用一个所谓的距离矩阵$\mathscr{D}=[d_{i,j}]$*表示出图上各点间的距离，它的一般元$d_{i,j}$表示顶点v_i与v_j间的距离。由上列说明可知$\mathscr{D}$的主对角线上的元素均为零。当图为无向时，$\mathscr{D}$为对称的。由第四章第三节的最短路径方法可得无向图7—5的距离矩阵$\mathscr{D}$为：

$$\mathscr{D}=\begin{pmatrix}0&1&2&3&2\\1&0&3&2&1\\2&3&0&2&3\\3&2&2&0&1\\2&1&3&1&0\end{pmatrix}$$

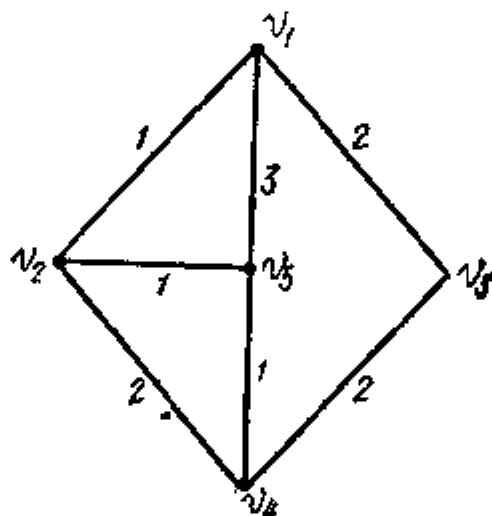


图7—5　距离矩阵

对于一个已给图，容易找到它的距离矩阵$\mathscr{D}$。反之，若已给一个$n\times n$阶的矩阵$\mathscr{D}$，那么如何判断它作为距离矩阵的实现性？即在什么条件下存在一个图G使它的距离矩阵就是$\mathscr{D}$呢？下面的定理回答了这个问题。

定理7.3：一个$n\times n$阶的、具有实的非负元的矩阵 $\mathscr{D}=[d_{i,j}]$是一个图的距离矩阵的充分必要条件为：

(*a*) $d_{i,i}=0$，　　　　$i=1,2,\cdots,n$；

(*b*) $d_{i,j}+d_{j,k}\geqslant d_{i,k}$。　　$i,j,k=1,2,\cdots,n$。

证明：条件是必要的，实因条件(*a*)即定义中约定的内容。而(*b*)说明，从v_i经v_j到v_k是一条从v_i到v_k的路，这显然是正确的断言。

以下证明条件的充分性。由$\mathscr{D}$按下列方法构造一个图G′：

描n个顶点并把它们标为$v_1,v_2,\cdots,v_n$。对于$\mathscr{D}$的元$d_{i,j}$联接一条权为$d_{i,j}$的、由v_i到v_j的

* 在第二章定义2.31中所说"路长"是指路上弧的数目，而在第四章定义4.2中是指自然长度。这里的定义更为广义。

弧。设G′的距离矩阵为$\mathscr{D}'=(d'_{i,j})$。显然$d'_{i,j}\leqslant d_{i,j}$，倘若G′不是$\mathscr{D}$的实现，则存在$i$和$j$使$d'_{i,j}<d_{i,j}$。这表示在G′上存在一条$i$-$j$路$p'=p'_{i,j}$，使$l(p')<d_{i,j}$。

设$p'_{i,j}$是G′中最短的i-j路。我们按$p'_{i,j}$中弧的数目，使用归纳法来证明$l(p'_{i,j})=d_{i,j}$对于一切i,j成立。由单一弧(i,j)构成的i-j路$p'_{i,j}$显然满足条件$l(p'_{i,j})=d'_{i,j}=d_{i,j}$。今设对于一切包含$k-1$条弧的最短路径$p'_{i,j}$都有$l(p'_{i,j})=d_{i,j}$，$(k\leqslant n)$。设$p'_{i,j}$含有$k$条弧，则因$p'_{i,j}=p'_{i,r}\cup(r,j)$。故由归纳假设$l(p'_{i,r})=d_{i,r}$，又因为弧$(r,j)$的权为$d_{r,j}$，所以$l(p'_{i,j})=d_{i,r}+d_{r,j}\geqslant d_{i,j}$，由此推出$d'_{i,j}\geqslant d_{i,j}$。注意已有结果$d'_{i,j}\leqslant d_{i,j}$，故必得$d'_{i,j}=d_{i,j}$，即$\mathscr{D}'=\mathscr{D}$。

距离矩阵可实现性的条件只说明凡满足定理7.3中的条件(a)和(b)的矩阵都可实现。即存在图G使其距离矩阵为$\mathscr{D}$，其唯一性如何？答案显然是否定的。例如G的距离矩阵为$\mathscr{D}$时，我们在G的任意两个顶点v_i与v_j之间加入一条长度为$d_{i,j}+1$的弧，则所得新图G′显然与G有共同的距离矩阵。

由上列关于非唯一性的说明，提出一个新问题，破坏唯一性的是图中多放入了一些“过长”的弧，倘若排除“过长”的弧，那么就能保证实现的唯一性。首先我们把“过长”的概念确切化。

定义7.7：若图G的弧(i,j)的长度$l(i,j)$满足条件，“存在顶点$v_k\overline{\in}\{v_i,v_j\}$使$l(i,j)\geqslant d_{i,k}+d_{k,j}$”，则称此弧为**多余的**。

定理7.4：若1-图G是$n\times n$的距离矩阵$\mathscr{D}$的一个实现，且G中无多余的弧，则G是唯一的。

证明：倘若存在另一个不同于G的n阶图G′，它没有多余的弧，且也以$\mathscr{D}$为距离矩阵。由于G与G′不同，故下列二情况至少有一种发生：

(a) G中的弧$u(i,j)$与G′中的弧$u'(i,j)$，有不同的非零长度$l(i,j)\neq l'(i,j)$。

(b) 不失一般性可设G中有弧(i,j)而G′中无相应的弧。

但由于G和G′中都没有多余的弧，故$l'(i,j)=d(i,j)=l(i,j)$，所以情况(a)不会发生。另外，由于G中有弧(i,j)而G′中没有，故存在顶点v_k使$d_{i,k}+d_{k,j}=d_{i,j}$，于是$l(i,j)=d_{i,k}+d_{k,j}$，这表示G中弧(i,j)是多余的，从而(b)也不会发生。此与(a)和(b)之一发生矛盾。

第三节　距离矩阵的最优实现

上一节讨论了距离矩阵实现的可能性与唯一性的问题，这一节将讨论最优实现的问题。

一、最优实现问题的意义

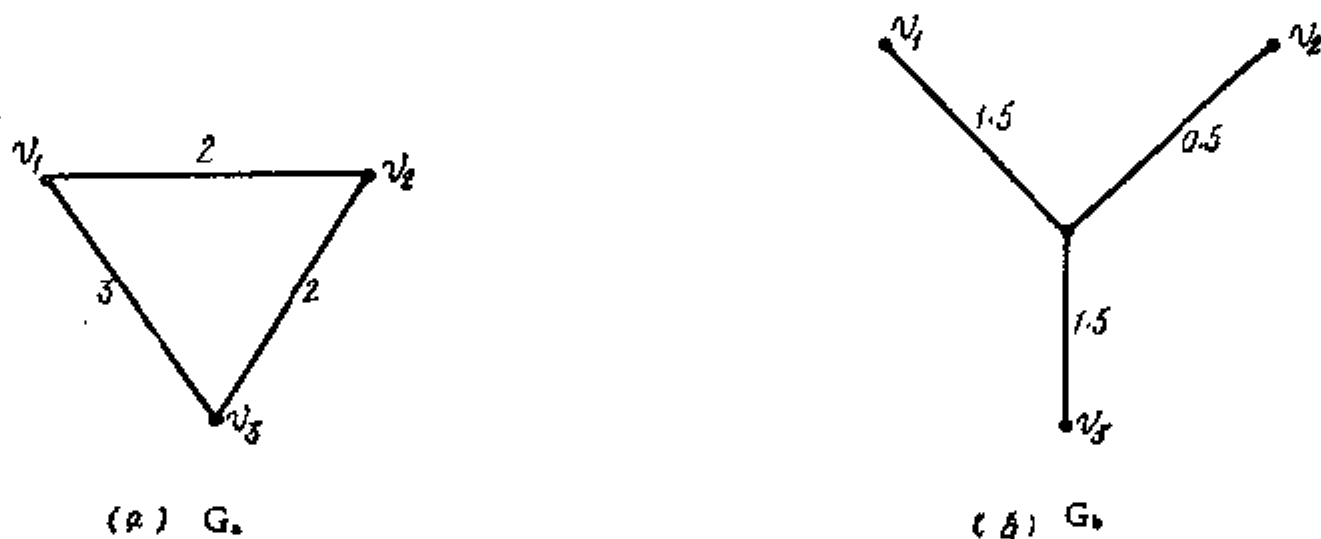
例7.5：在图7－6 a和7－6 b中，它们的距离矩阵都是$\mathscr{D}$，然而(a)图与(b)图各弧的总长度却是不同的：$l(G_b)<l(G_a)$。

$$\mathscr{D}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

定义7.8：设$\mathscr{D}$为一个距离矩阵，$G(\mathscr{D})$为$\mathscr{D}$的实现的全体图所成集合，$l(G)$表示图G边

的总长度。若图G_0满足条件：$l(G_0)=\min_{G\in G[\mathscr{D}]} l(G)$，则称$G_0$为$\mathscr{D}$的**最优实现**。

由上一节我们知道，一个有多余边的图当然不是最优实现。又由定理7.7可知距离矩阵的无多余边的实现是唯一的。由例7.5可知，一个距离矩阵的最优实现，需要打破图的阶数n等于矩阵的行(列)数的限制，即允许在图中添入若干“内点”，如图7－6 b中未标号的点。为了加以区别，称与$\mathscr{D}$的行相应的顶点为“外点”。



(a) G_a　　(b) G_b

图7－6　最优实现

一般来说，找$\mathscr{D}$的最优实现是一个尚未得到解决的问题。我们在这一节里仅就无向图讨论若干特款。首先应当指出$\mathscr{D}$的实现的无限性：倘若G为$\mathscr{D}$的一个实现，则可在G的各边上加入任意多个内点，所得新图也都是$\mathscr{D}$的带有内点的实现。因此为了排除这种串联边的情况，以下约定每一个实现的内点的次数至少为3。在例7.5中所显示的事实有普遍性：若$\mathscr{D}$能由树T来实现，则T是$\mathscr{D}$的最优实现。在这里我们首先证明树实现的唯一性。

定理7.5：若$\mathscr{D}$可以由树T来实现，则T是$\mathscr{D}$的唯一的树实现。

证明：以下按$\mathscr{D}$的阶数n用归纳法来证明。若$\mathscr{D}$是2×2的矩阵，则定理显然成立。今设定理对于$(n-1)\times(n-1)$的矩阵成立。设$\mathscr{D}$是一个$n\times n$的矩阵，并设顶点v_n的次数为1（必要时将$\mathscr{D}$的行及列作调整）。用$\mathscr{D}^*$表示$\mathscr{D}$的首$(n-1)\times(n-1)$的主子阵。若树T为$\mathscr{D}$的一个实现，则必导致$\mathscr{D}^*$的一个实现T^*。由归纳假设T^*是唯一的，往证将v_n联到T^*上的方法也是唯一的。

今设以边$[n,x]$将v_n联到T^*上得T，以$[n,y]$将v_n联到T^*上得$\hat{T}$，且$\hat{T}$也是$\mathscr{D}$的树实现。

显然T^*有点v_i使在T上有（注意树上任二点间有唯一链）

$$d_{n,i}=l[n,x]+d_{x,i} \tag{7.30}$$

而在$\hat{T}$上有

$$d_{n,i}=l[n,y]+d(v_y,v_x)+d(v_x,v_i) \tag{7.31}$$

从而得

$$l[n,y]+d(v_y,v_x)=l[n,x] \tag{7.32}$$

同理可取T^*上的顶点v_j使在T上有

$$d_{n,j}=l[n,x]+d(v_x,v_y)+d(v_y,v_j) \tag{7.33}$$

在$\hat{T}$上有

$$d_{n,j}=l[n,y]+d(v_y,v_j) \tag{7.34}$$

由以上二式得

$$l[n,x]+d(v_x,v_y)=l[n,y] \tag{7.35}$$

比较式（7.32）与（7.35）得

$$d(v_x, v_y) = 0\ ,\ l[n, x] = l[n, y]$$

这就证明了将v_x联到T*上的唯一性，从而定理得证。

二、最优化方法

若$\mathscr{D}$满足定理7.3的条件则可实现，倘若G为$\mathscr{D}$的一个实现，我们在本段提供一种减缩G的总“长度”l(G)的方法：**基本减缩圈方法**。我们重复使用此方法来逐步减缩$\mathscr{D}$的实现的总长度。但当此方法终止时并不能保证所得图形为最优的，须将此方法稍加修改，方可产生最优树。

设$\mathscr{D}$的实现G上有三条边$[i,j]$，$[j,k]$和$[k,i]$，满足条件：

$$l[i,j]+l[j,k]>l[i,k],\ l[j,k]+l[k,i]>l[j,i],\ l[k,i]+l[i,j]>l[k,j]。$$

则在将G中这三条边取消而加入一个内点v_x之后，依次用下列各边代替它们而得新图G′：

$$[x,i],\ [x,j]和[x,k],$$

并赋予各边的长度如下：

$$l[x,i]=\frac{1}{2}\{l[i,j]+l[i,k]-l[j,k]\},$$

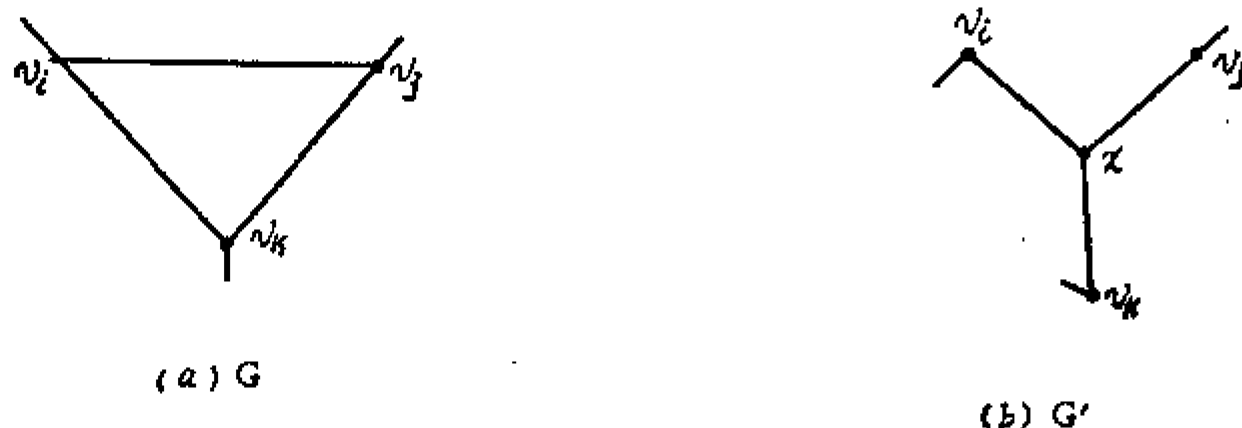
$$l[x,j]=\frac{1}{2}\{l[j,i]+l[j,k]-l[i,k]\};$$

$$l[x,k]=\frac{1}{2}\{l[k,i]+l[k,j]-l[i,j]\}。$$

显然G′也是$\mathscr{D}$的实现，而且

$$l(G')=l(G)-\frac{1}{2}\{l[i,j]+l[j,k]+l[k,i]\}<l(G)$$

当$\mathscr{D}$的实现G上没有上列性质的三条边时，可以加入一条虚边使上列缩减法得以施行，如图7—8。



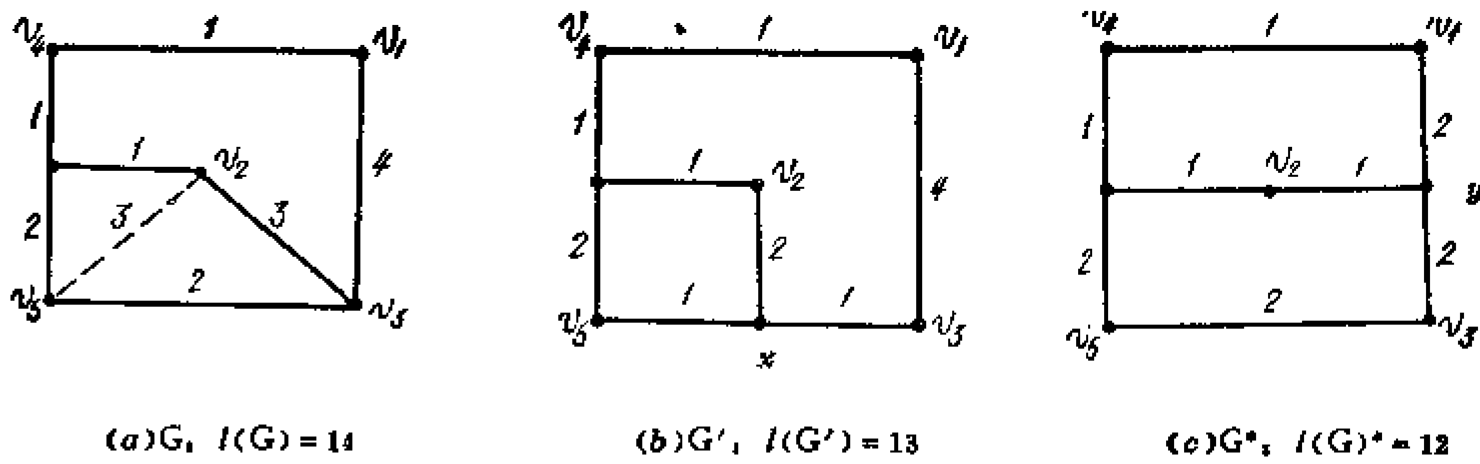
(a) G　　(b) G′

图7—7　减缩图

例7.6：图7—8a之图G为$\mathscr{D}$的一个实现。其中[5,2]为一个虚边，于是[5,2]、[2,3]及[3,5]构成一个基本减缩圈，故可添入一内点将G减缩为G′。此时G′不能再应用基本减缩圈方法，然而它并不是最优的，如图(c)中之G*较G′更好。G*可在G中不加虚边[5,2]而加虚边[2,1]获得。

至于$\mathscr{D}$的树实现是最优实现将在定理7.8中证明。下面给出以树（若可能）实现$\mathscr{D}$的方法。

设$\mathscr{D}^{(i)}$是$\mathscr{D}$的前$i\times i$主子阵，于是若$\mathscr{D}$可以用树T实现时，$\mathscr{D}^{(i)}$也可以用树$T^{(i)}$实现。



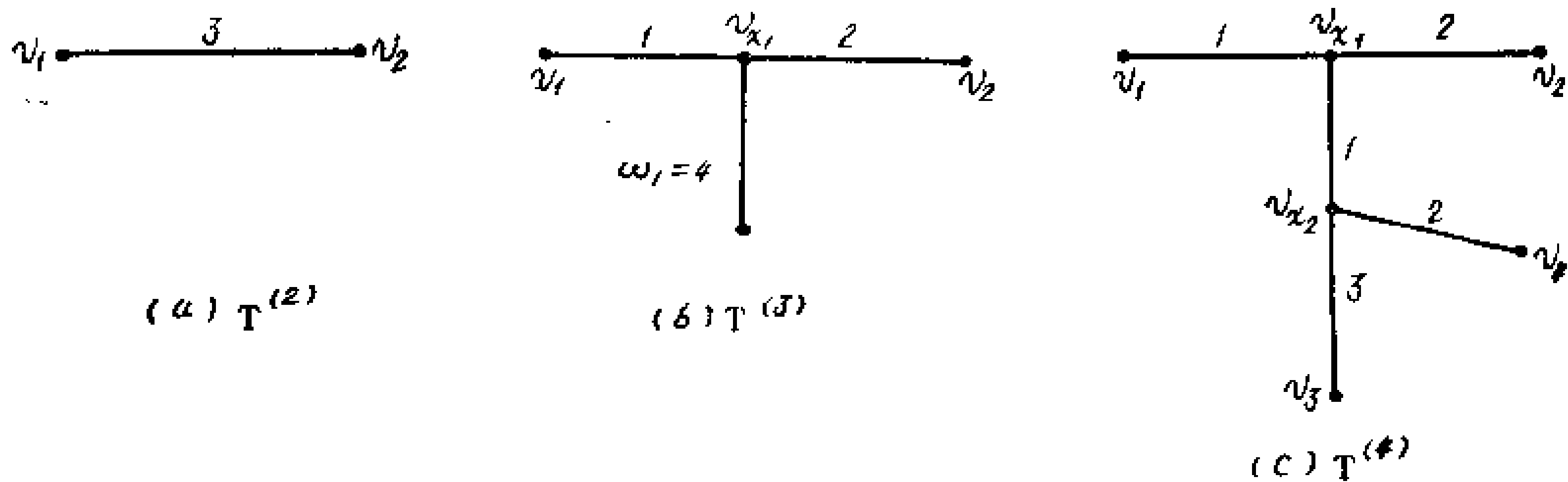
(a)G, $l(G)=14$　　(b)G′, $l(G')=13$　　(c)G*, $l(G)^*=12$

图7—8　基本减缩图方法

从$\mathscr{D}^{(2)}$开始设其实现为树$T^{(2)}$；联接v_1和v_2的边[1,2]并设$d_{1,2}=l[1,2]$。在$T^{(2)}$上找一点v_X并联接$[v_3,v_X]$得$\mathscr{D}^{(3)}$的实现$T^{(3)}$。将此手续一直继续到底。

例7.7：已知距离矩阵$\mathscr{D}$，求其树实现。

$$\mathscr{D}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 5 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$



(a) $T^{(2)}$　　(b) $T^{(3)}$　　(c) $T^{(4)}$

图7—9　实现树方法

$$\mathscr{D}^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathscr{D}^{(3)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathscr{D}^{(4)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}。$$

我们首先实现$\mathscr{D}$的前 2 × 2 的主子阵$\mathscr{D}^{(2)}$，其结果$T^{(2)}$见图7—9的(a)图。然后在$T^{(2)}$上加入v_3，并实现$\mathscr{D}$的前 3 × 3 的主子阵$\mathscr{D}^{(3)}$，其结果$T^{(3)}$见图7—9的(b)图。接着就要在$T^{(3)}$上加入顶点v_4以求实现$T^{(4)}$等等。实现前两步$T^{(2)}$及$T^{(3)}$是很方便的，但为了在$T^{(3)}$上加入v_4，首先应当确定在哪条边上添加一个衔接内点v_{x_2}，假设v_{x_2}在$[v_1,v_2]$上，距v_1的距离为x_2则应由

$$\begin{cases} x_2+\omega_2=d_{1,4}=4 \\ (3-x_2)+\omega_2=d_{2,4}=5 \end{cases}$$

解得　$x_2=1$，$\omega_2=3$。但此时$d(v_3,v_4)=\omega_2+4=3+4=7\neq d_{3,4}=5$，所以$x_2$不在[1,2]上。今设$v_{x_2}$在$[v_{x_1},\ v_3]$上，则应由

$$\begin{cases}1+x_2+\omega_2=d_{1,4}=4\\4-x_2+\omega_2=d_{3,4}=5\end{cases}$$

解得　$x_2=1$，$\omega_2=2$。此时 $d[v_2,v_4]=2+1+2=5=d_{2,4}$，所以得到 4 个顶点的树$T^{(4)}$为$\mathscr{D}^{(4)}$的一个实现，见图 7－9 的($c$)图。

为了把v_5联接到$T^{(4)}$上去，依次假设衔接点x_3在[1,2]上或$[v_{x_1},v_3]$上或$[v_{x_2},\ v_4]$上。相应地得到三个方程组

Ⅰ)
$$\begin{cases}x_3+\omega_3=d_{1,5}=5\\(3-x_3)+\omega_3=d_{2,5}=6\end{cases}$$

解得　$x_3=1,\omega_3=4$，　　但$d[v_3,v_5]=4+3=7\neq d_{3,5}$

Ⅱ)
$$\begin{cases}1+x_3+\omega_3=d_{1,5}=5\\4-x_3+\omega_3=d_{3,5}=4\end{cases}$$

解得　$x_3=2$，$\omega_3=2$，　　但$d[v_4,v_5]=2+1+2=5\neq d_{4,5}$

Ⅲ)
$$\begin{cases}2+x_3+\omega_3=d_{1,5}=5\\(2-x_3)+\omega_3=d_{4,5}=3\end{cases}$$

解得　$x_3=1$，$\omega_3=2$，　　但$d[v_3,v_5]=3+1+2=6\neq d_{3,5}$

所以，虽然$\mathscr{D}^{(4)}$可以由树$T^{(4)}$实现，但$\mathscr{D}$却不能。

三、树实现的最优性

上段讨论了树实现方法，现在来论证树实现的最优性。

定义7.9：若图G的顶点v_p满足以下条件，则称v_p为G的**紧顶点**：存在G的距离矩阵$\mathscr{D}$的一个元$d_{i,j}$使

$$d_{i,j}=d(v_i,v_p)+d(v_p,v_j)\qquad i\neq p,\ j\neq p。$$

关于最优实现的性质有以下定理。

定理7.6：若距离矩阵$\mathscr{D}$的最优实现为G，则G的每一个次数大于 1 的外顶点都是紧的。

证明：倘若存在G的一个外顶点v_p，它的次数大于 1，但不是紧的，往证 G 不是最优的。

1）设顶点v_q及v_r属于v_p的可达集：$\{v_q,v_r\}\subset R(v_p)$，且$v_q$和$v_r$与$v_p$相邻。由于$v_p$不是紧的，故当G中有边$[v_q,v_r]$时有：

$$d(v_q,v_r)<d(v_q,v_p)+d(v_p,v_r)$$

由于
$$d(v_q,v_p)<d(v_q,v_r)+d(v_r,v_p)$$

及
$$d(v_p,v_r)<d(v_p,v_q)+d(v_q,v_r)$$

或者同时成立；或者有一个不成立。在前一种情况下可以用基本减缩圈方法；在后一种情况G有多余的边，故无论如何G都不是最优的。从而G中无$[v_q,v_r]$边。

2）由于$[v_q,v_r]$不在G里，今由G构造一个新图G′：将$[v_q,v_r]$加在G中，并令其权为ω_0：

$$\omega_0=\max_{i,j}[d(v_i,v_j)-d(v_i,v_q)-d(v_j,v_r);\ \ 0]$$

设G′的距离矩阵为$\mathscr{D}'=(d'_{i,j})$。显然$d'_{i,j}\leqslant d_{i,j}$，进而指出对一切$i,j$恒有$d'_{i,j}=d_{i,j}$。倘若不然，则至少有一个元设为$d'_{s,t}<d_{s,t}$。这就是说，将$[v_q,v_r]$加入之后把$d_{s,t}$减缩为$d'_{s,t}$，故必有

$$d'_{s,t}=d(v_s,v_q)+\omega_0+d(v_r,v_t)$$

由定义
$$\omega_0\geqslant d(v_i,v_j)-d(v_i,v_q)-d(v_j,v_r)$$

从以上二式得

$$d'_{s,t}\geqslant d(v_s,v_t)=d_{s,t}$$

此与$d'_{s,t}<d_{s,t}$矛盾。所以$\mathscr{D}=\mathscr{D}'$。

3）以下证明$\omega_0<d(v_q,v_p)+d(v_p,v_r)$。

由于v_p不是紧的，故有$d(v_s,v_t)<d(v_s,v_p)+d(v_p,v_t)$

由于$\mathscr{D}$的可实现性条件，必有

$$d(v_s,v_p)\leqslant d(v_s,v_q)+d(v_q,v_p)$$

和
$$d(v_p,v_t)\leqslant d(v_p,v_r)+d(v_r,v_t)$$

综合以上三式可得

$$d(v_s,v_t)<d(v_s,v_q)+d(v_q,v_p)+d(v_p,v_r)+d(v_r,v_t)$$

或
$$d(v_s,v_t)-d(v_s,v_q)-d(v_t,v_r)<d(v_q,v_p)+d(v_p,v_r)$$

由于图的有限性，可以认为v_s和v_t的选择使上式之左端为ω_0，从而得

$$\omega_0<d(v_q,v_p)+d(v_p,v_r)$$

4）往证G不是最优的。因为$\omega_0<d(v_q,v_p)+d(v_p,v_r)$，若$[p,q]$与$[r,p]$之一为多余的，并从G′中将此多余的边消除，所得新图G^*也是$\mathscr{D}$的实现但$l(G^*)<l(G)$。倘若以上两条边都不是多余的，则由基本减缩方法可由G′得G^*，而使$l(G^*)=l(G')-\frac{1}{2}\{\omega_0+l[q,p]+l[r,p]\}$，又因$\omega_0<l[q,p]+l[r,p]$，所以$l(G^*)<l(G')-\omega_0=l(G)$。

综合以上四步可知，当$\mathscr{D}$的实现G有次数大于1的、非紧的外顶点时，G不是最优实现。从而定理得证。

这个定理及其证明方法表明，只要是$\mathscr{D}$的实现G中有非紧的、次数大于1的外顶点，就可以在G中加入权为ω_0的边，而后去掉多余边或用基本减缩圈方法得到较G为优的实现G^*。现在转而讨论最优实现的一个充分条件。

设$\mathscr{D}$是一个距离矩阵，a为一个非负实数，定义矩阵$\mathscr{D}_i(a)=[d^{(i)}_{p,q}]$如下：

$$d^{(i)}_{p,q}=\begin{cases} d_{p,q} & 若p\neq i,\ q\neq i \\ d_{p,q}-a & 若p=i或q=i \\ 0 & 若p=q \end{cases}$$

以下引理指出$\mathscr{D}_i(a)$是一个距离矩阵时，a取值的范围。

引理7.5： $\mathscr{D}_i(a)$是一个距离矩阵的充分必要条件是

$$a\leqslant\frac{1}{2}(d_{p,i}+d_{i,r}-d_{p,r}) \tag{7.36}$$

对于 $p\neq i$，$r\neq i$，$p,r=1,2,\cdots,n$成立。

证明：必要性。

倘若存在v_p及v_r均异于v_i，但$a>\frac{1}{2}(d_{p,i}+d_{i,r}-d_{p,r})$，则有$d_{p,r}>(d_{p,i}-a)+(d_{i,r}-a)$。所以由定理7.3可知$\mathscr{D}_i(a)$不是距离矩阵。

今证充分性。

为此只需证明对一切 q 恒有

$$d_{p,q}^{(i)}+d_{q,r}^{(i)}\geqslant d_{p,r}^{(i)} \tag{7.37}$$

对 $p,r=1,2,\cdots,n$ 均成立。若 $p\neq i$, $r\neq i$, $q\neq i$ 则由 $\mathscr{D}_i(a)$ 之定义及 $\mathscr{D}$ 为距离矩阵，由定理7.3可知式(7.37)成立。若 $p=i$ 或 $r=i$ 之一成立而 $q\neq i$，则式(7.37)仍成立。若 $q\neq i$，$p=r=i$ 时，式(7.37)变为

$$(d_{i,q}-a)+(d_{q,i}-a)\geqslant 0$$

或

$$d_{i,q}\geqslant a$$

这由式(7.36)中令 $p=r=q$ 立得。若 $q=i$，$p\neq i$，$r\neq i$，则式(7.37)为 $(d_{p,i}-a)+(d_{i,r}-a)\geqslant d_{p,r}$，这就是式(7.36)，故成立。若 $q=i$，而 $p=i$ 或 $r=i$，则式(7.37)也显然成立。

引理7.6：令 $a_0=\min\limits_{\substack{p,r=1,2,\cdots,n\\ p\neq i,r\neq i}}\{(d_{p,i}+d_{i,r}-d_{p,r})/2\}$，则 $\mathscr{D}_i(a)$ 是距离矩阵的充分必要条件为 $0\leqslant a\leqslant a_0$。

证明：这是引理7.5的必然结论。

设 $G_i(a)$ 为 $\mathscr{D}_i(a)$ 的一个实现，则按下列方法由 $G_i(a)$ 所得之图G必是 $\mathscr{D}$ 的实现：将 v_i' 加在 $G_i(a)$ 中，并以 $[v_i,v_i']$ 将 v_i' 及 v_i 联接起来，并赋予 $[v_i,v_i']$ 以权为 a。于是将 v_i 视为G的内点，而将 v_i' 视为G的外点时，则G为 $\mathscr{D}$ 的实现。把由 $G_i(a)$ 得到G的这个手续叫作**还原**。

定理7.7：设 $G_i(a)$，$0\leqslant a\leqslant a_0$ 是 $\mathscr{D}_i(a)$ 的一个最优实现，G为 $G_i(a)$ 的还原，则G为 $\mathscr{D}$ 的最优实现。

证明：若 $a=0$ 则定理显然成立。今设 $a>0$，首先往证若 G^* 为 $\mathscr{D}$ 的一个最优实现时，则 G^* 的第 i 个顶点 v_i 的次数必为1。倘若 $d(v_i)\geqslant 2$，则由 a_0 的定义可知

$$a_0\leqslant\frac{1}{2}(d_{p,i}+d_{i,r}-d_{p,r}),\qquad p,r=1,2,\cdots,n,\ p\neq i,r\neq i。$$

又因为 $0<a\leqslant a_0$，　所以　$d_{p,i}+d_{i,r}>d_{p,r}^{(i)}$

于是 v_i 不是 G^* 的紧顶点，从而 G^* 不是最优的。此与 G^* 为 $\mathscr{D}$ 的最优实现矛盾，故 $d(v_i)=1$。

倘若 $G_i(a)$ 的还原G不是 $\mathscr{D}$ 的最优实现，而 G^* 是 $\mathscr{D}$ 的最优实现。则

$$l(G^*)<l(G)=l[G_i(a)]+a$$

在 G^* 中设与 v_i' 相邻的顶点为 v_{x^*}。则 $d(v_i',v_{x^*})=a_1<a$，否则就可以在 G^* 的边 $[v_i',v_{x^*}]$ 上精心选出一个点 v_i^*，使 $l[v_i',v_i^*]=a$，我们从 G^* 中将 $[v_i',v_i^*]$ 去掉后，设得到的图为 G_1^*。显然 G_1^* 是 $\mathscr{D}_i(a)$ 的一个实现，而且

$$l(G_1^*)=l(G^*)-a<l(G)-a=l[G_i(a)]$$

此与 $G_i(a)$ 为 $\mathscr{D}_i(a)$ 的最优实现相矛盾。故必有 $d(v_i',v_{x^*})=a_1<a$。

因为 $d(v_i',v_{x^*})<a$，故 v_{x^*} 必是一个内点，所以 $d(v_{x^*})\geqslant 3$。设从 G^* 中去掉 $[v_i',v_{x^*}]$ 之后所得图记为 $G_i^*(a_1)$。则 G^* 的顶点 v_{x^*} 必是 $G_i(a_1)$ 的第 i 个顶点，且 $G_i^*(a_1)$ 为 $\mathscr{D}_i(a_1)$ 的一个实现。由于 $0<a_1<a$，我们再一次得到

$$d_{p,i}+d_{i,r}>d_{p,r},\qquad p,r=1,2,\cdots,n;p\neq i,r\neq i。$$

所以 v_{x^*} 在 $G_i^*(a_1)$ 中不是紧的，这说明 $G_i^*(a_1)$ 不是 $\mathscr{D}_i(a_1)$ 的最优实现，从而 G^* 也不是 $\mathscr{D}$ 的最优实现，故矛盾。于是G是 $\mathscr{D}$ 的最优实现。

定理7.8： 若树T为$\mathscr{D}$的一个实现，则T是$\mathscr{D}$的最优实现。

证明：若$\mathscr{D}$是2阶的，则定理显然为真。今设$\mathscr{D}$为$n-1$阶时定理为真。令$\mathscr{D}$为$n\times n$的距离矩阵，T_n为它的一个树实现，且T_n的第n个顶点的次数为1；$d(v_n)=1$，则$\mathscr{D}$的首$(n-1)\times(n-1)$主子阵$\mathscr{D}^{(n-1)}$，有一个树实现T_{n-1}为最优。

设T_n是在T_{n-1}上加入边$[v_n, v_x]$（其权为ω_0）将v_n联上之后所得之图，其中v_x为T_{n-1}上之点（不必须为顶点）。设v_x在T_{n-1}上的标记为v_n'，并用T_n'表示将v_n叠置在T_{n-1}中的点v_n'之后所得的图。设$\mathscr{D}^{(n')}$为T_n'的$n\times n$的距离矩阵，可见$\mathscr{D}^{(n')}=\mathscr{D}_n(\omega_0)$由归纳假设$T_{n-1}$为$\mathscr{D}^{(n-1)}$的最优实现，$T_n'$是$\mathscr{D}_n(\omega_0)$的最优实现。故由定理7.7得知$T_n$为$\mathscr{D}$的最优实现。

由以上各定理可知，若距离矩阵可由树来实现，则此实现具有唯一性和最优性。而且我们提供了找树实现的手续（如果有树实现的话）。

第四节　图的中心和中位点

一、中心和中位点的实际意义

图是运输网、信息传输网、公用事业服务网等等的数学模型。在所有这些实际问题中都有各种不同的最优定址问题。例如运输网，任何一种待运货物都要首先送到最近的一个站，而后才可以到达它的目的地。假设在某地区有n个居民点，它们之间由路段联接成为一个连接图，那么应如何选定站的位置，才能使总的运输“费用”最小呢？这就是一个确定图的中位点问题。又如在某地要同时兴建十座建筑物，那么应如何选定堆料场才使运输总距离为最小呢？这也是一个中位点问题。

在评价一个系统的好坏时，有各种不同的标准。除上述的中位点之外，还有另一种评价标准，即中心问题。例如为保证十座同样规模和重要性的油库安全，拟建立一个消防中心，当评价的标准为消防中心到最远的油库的距离最小时，我们所遇到的就是中心问题。

当图上各点具有同一重要性时，我们可以把它们统一对待，但实际上常常不是这样。例如图的顶点为居民点时，显然村镇有大小之别。因此经常需要考虑加权顶点的问题。又例如我们要建立一个电话交换中心时，它的最优定址问题，就必须考虑到各站呼唤流发生的强度。因为对于高强度流，就必须使用容量更大的线路。因此为了节约输电线的造价，就应使中心靠近呼唤流最强的站。这就是加权的意义。显然无权网可以视为特殊的加权（恒为1）网。

二、图的中心

定义7.10： 设$G=(V,E)$是n个顶点的无向图，若$v_c\in V$，并满足以下条件，则称v_c为G的**中心**：

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{d(v_c,v_j)\}=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}[d(v_k,v_j)]\}\tag{7.38}$$

若令

$$\rho_k=\max_{1\leqslant j\leqslant n}[d(v_k,v_j)]$$

$$\rho_G=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\rho_k$$

则式（7.38）取下列形式

$$\rho_C = \rho_G$$

并称ρ_G为图G的半径。ρ_k为图G在v_k点上的半径。

性质7.2：每一个无向图G至少有一个中心。设G的距离矩阵为$\mathscr{D}$，则

$$\rho_G = \min_{1\le i\le n}\{\max_{1\le j\le n} d_{i,j}\} = \min_{1\le i\le n}\rho_i$$

例7.8：求图 7—10的中心和半径。

首先求出它的距离矩阵。

$$\mathscr{D}=\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

易见$\rho_1 = 6 = \rho_G$

$\rho_2 = 7$

$\rho_3 = 6 = \rho_G$

$\rho_4 = 7$

$\rho_5 = 6 = \rho_G$

$\rho_6 = 7$

从而图的中心有三个：v_1, v_3和v_5。半径$\rho_G = 6$。

设$h(1)$，…，$h(n)$分别为G的顶点v_1，…，v_n上的权，固定的非负实数。$h(i)$可以是由中心v_c到达v_i的某种测度，也可以是v_i内部结构的某种指标。考虑到这些权，图的中心的概念就应作如下的推广。

定义7.11：称$\rho_k(h) = \max_{1\le i\le n}[h(i)\cdot d(v_k, v_i)]$

为图G的依权h在v_k点上的半径。并称$\rho_G(h) = \min_{1\le k\le n}\rho_k(h)$

为图G的依权h的半径。而称满足下列条件的点v_c为G的依权h的中心：$\rho_C(h) = \rho_G(h)$。

在关于中心的定义中，实际上存在这样一个问题：为什么限定在图的顶点上找最优地址呢？在图的其它位置上（即在图的边上）能否找到更好的点呢？答案是肯定的，显然我们还可以提出在其它条件下的最优选址问题。读者可以按自己的实际问题提出并解决某些特殊问题。为了对此获得深刻印象，我们再来审查图 7—10的最优选址问题。

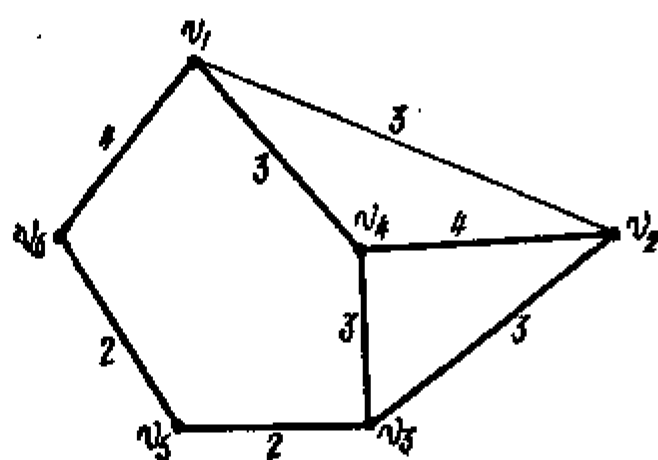


图 7—10 图的中心

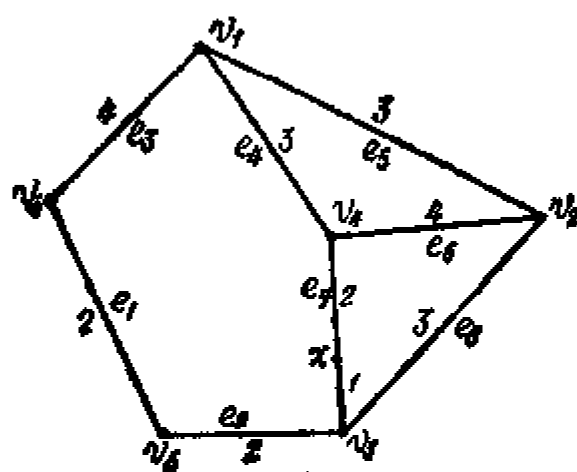


图 7—11 图上的绝对中心

在图 7—11的e_7边上我们选定了一个x_0，可见$\rho_{x_0} = d(v_1, x_0) = 5 < \rho_G$，也就是说，当允许把中心选在G的其它点上时，图会有更小的半径。我们将此概念精确化如下。

定义7.12：图G(边)上的点X_0满足下列条件时，叫作图G相对于$h(\cdot)$的绝对中心。

$$\max_{1\le i\le n}[h(i)d(X_0, v_i)] = \min_{X\in G}\{\max_{1\le i\le n}[h(i)d(X, v_i)]\}$$

为了进一步讨论绝对中心，我们引入以下概念。

定义7.13：图的e_k边上的点X_{0k}满足以下条件时，称为G的**局部中心**：

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}[h(i)d(X_{0k},v_i)]=\min_{X\in e_k}\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}[h(i)d(X,v_i)]\}$$

局部中心的意义是把中心限定在e_k上时，它与图上最远的点为最近。当图的局部中心的集合确定之后，绝对中心X_0就可以由$\{X_{01}, X_{02}, \cdots, X_{0m}\}$中选出：

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}[h(i)d(X_0,v_i)]=\min_{1\leqslant k\leqslant m}\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}[h(i)d(X_{0k},v_i)]\}$$

并称上列数值为**绝对半径**，记为r_G。由于$X_{0k}\in e_k$，即X_{0k}可以是e_k的端点，从而得下列性质。

性质7.2：图的绝对半径r_G不超过它的半径ρ_G：

$$r_G\leqslant\rho_G$$

以下讨论确定图的绝对中心的方法。首先求出各边上的局部中心集$\{X_{01}, X_{02}, \cdots, X_{0m}\}$；而后由此集中选取绝对中心$X_0$；最后由$X_0$确定图的绝对半径$r_G$。为了给出绝对中心的分析表达式，首先研究出图7—12所显示的关系。设v_i为图G上任一顶点；e_k为它的任一选定的边。为了求e_k上的局部中心X_{0k}，首先在e_k上任取一点X，并设它与e_k之一端（比如v_p）相距x（非负实数）。这样一来X与图上最远的顶点的距离$\rho_X(h)$就是x的函数$f_k(x)$：

$$f_k(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{h(i)d(X,v_i)\}$$

其中$0\leqslant x\leqslant\omega_k$，$\omega_k=\omega(e_k)$为$e_k$之权。$f_k(x)$就是G的依权$h$在$X$点上的半径。倘若$X_{0k}$为$f_k(x)$在$[0,\omega_k]$上的最小点，则$e_k$上与$x_{0k}$相对应的点$X_{0k}$，就是G在$e_k$上的局部中心。

今以图7—12为例，将上列方法具体应用如下：

$$d(X,v_i)=\min\{d(X,v_p)+d(v_p,v_i);\ d(X,v_q)+d(v_q,v_i)\}。$$

因为$d(X,v_p)=x$，$d(X,v_q)=\omega_k-x$ 故上式为

$$d(X,v_i)=\min\{x+d(v_p,v_i);\ \omega_k-x+d(v_q,v_i)\},\qquad 0\leqslant x\leqslant\omega_k。$$

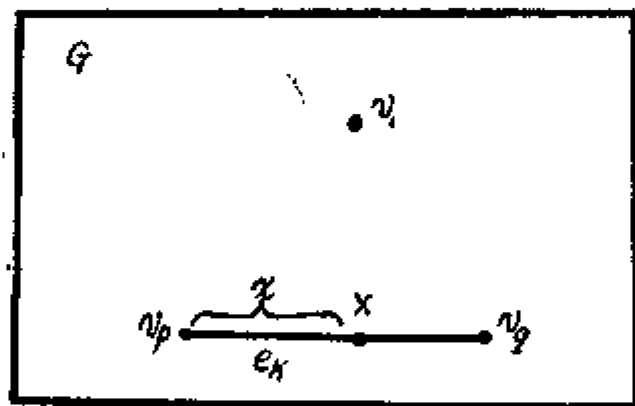


图7—12 局部中心

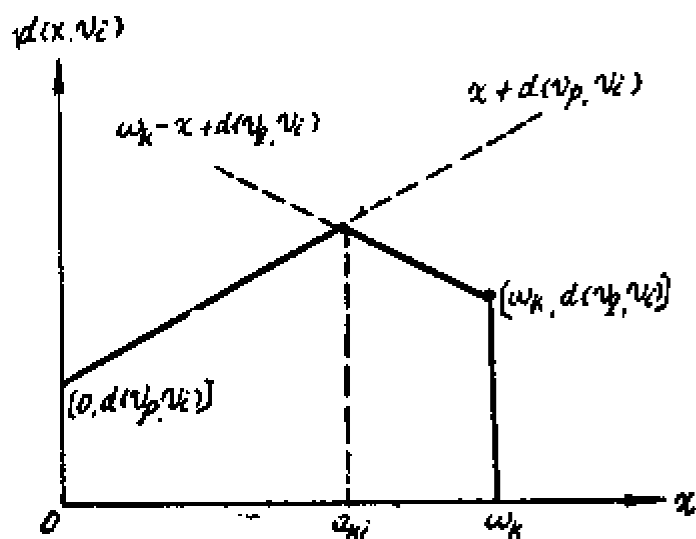


图7—13 局部中心一

将$d(X,v_i)$的图形画在图7—13中，其中$a_{k,i}$为以下方程的解：

$$\omega_k-x+d(v_q,v_i)=x+d(v_p,v_i)$$

即当
$$0\leqslant\frac{1}{2}\{\omega_k+d(v_q,v_i)-d(v_p,v_i)\}\leqslant\omega_k\ 时$$

$$a_{k,i}=\frac{1}{2}[\omega_k+d(v_q,v_i)-d(v_p,v_i)]$$

若$a_{k,i}<0$或者$a_{k,i}>\omega_k$时，应分别取$a_{k,i}=0$和$a_{k,i}=\omega_k$，从而有

$$d(X,v_i)=\begin{cases}x+d(v_p,v_i) & 若\ 0\leqslant x\leqslant a_{k,i}\\ \omega_k-x+d(v_q,v_i) & 若\ a_{k,i}<x\leqslant\omega_k\end{cases}$$

显然$h(i)d(X,v_i)$也是由线性函数构成的，它由$d(X,v_i)$经改变尺度而得：

$$h(i)d(X,v_i)=\begin{cases}h(i)[x+d(v_p,v_i)] & 若\ 0\leqslant x\leqslant a_{k,i}\\ h(i)[\omega_k-x+d(v_q,v_i)] & 若\ a_{k,i}<x\leqslant\omega_k\end{cases}$$

为了找出局部中心，必须在e_k上找一个使$f_k(x)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}[h(i)d(X,v_i)]$为最小的点$X_{0k}$，为此首先作出$h(1)d(X,v_1),h(2)d(X,v_2),\cdots,h(n)d(X,v_n)$诸函数之图，如图7—14所示。在$[0,\omega_k]$上诸函数之最大值$f_k(x)$用粗线表示在图上。$f_k(x)$的所有极小点如$X_{0k}$，均对应于$e_k$上的局部中心。故对G的各边重复使用此手续，则可得G的局部中心集合。绝对中心随之可以定出来。

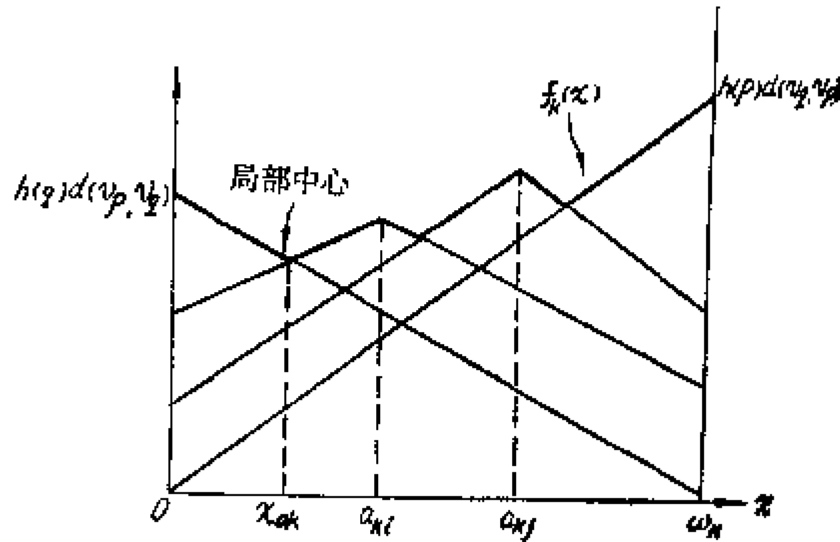


图7—14　局部中心二

例7.9：为了说明找绝对中心的手续，重新审查图7—11，为简化计，设$h(1)=h(2)=\cdots=h(n)=1$。对各边分别求$f_k(x)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d(X,v_i)\},(k=1,2,\cdots,8)$的最小值：

$$\min_{X\in e_1}f_1(x)=5.5;\qquad \min_{X\in e_3}f_3(x)=5.5;$$

$$\min_{X\in e_7}f_7(x)=5\qquad 若d(X,v_3)=1;$$

和

$$\min_{X\in e_8}f_8(x)=5\qquad 若d(X,v_3)=1$$

且易见$f_2(x)\geqslant6$，　$f_4(x)\geqslant6$，　$f_5(x)\geqslant6$，　$f_6(x)\geqslant7$，故图7—9有两个绝对中心，分别在e_7和e_8上，且绝对半径$r_G=5$。

三、图的中位点

为了再一次说明图的中位点的实际意义，设G为一通信系统。图的各边连接系统的各种终端，每一个边可供两个特定的顶点间通信使用，每一个边上的权表示它的长度或其它费用指标。设在此通信系统中，所有信息必须经由中心站v_m处理之后才能送往目的地。在确定操作中心时，需要把从中心到各站的线路总长极小化。G中使系统中的线路总长为最小的顶点叫作图的中位点。

定义7.14：G的顶点v_m满足以下条件时，称为图的**中位点**：

$$\sum_{j=1}^{n}d(v_m,v_j)=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}d(v_k,v_j)$$

若v_m为图的中位点，则

由中心v_o到达v_i的某种测度，也可以是v_i内部结构的某种指标。考虑到这些权，图的中心的

$$R_0=\sum_{i=1}^{n}d(v_m,v_i)$$

称为图的**中线长**。

确定一个图的中位点和中线长显然是日常生产和生活中经常遇到的问题。若G的距离矩阵为$\mathscr{D}$，并设

$$d_{i,\cdot}=\sum_{j=1}^{n}d_{i,j}$$

$$d_{j,\cdot}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_{i,\cdot}\}$$

则v_j为G的中位点，而$d_{j,\cdot}=R_0$为G的中线长。为了掌握图的中位点和中线长由$\mathscr{D}$的元素确定的方法。再一次来审查图7－11和它的距离矩阵。易见

$d_{1,\cdot}=22$，$d_{2,\cdot}=22$，$d_{3,\cdot}=18$，$d_{4,\cdot}=22$，$d_{5,\cdot}=20$．$d_{6,\cdot}=24$。

故上列六个数的极小值为$d_{3,\cdot}=18$，所以图7－9的中位点为v_3，中线长$R_0=18$。

若考虑到权的问题，则中位点、中线长的概念应作如下推广。

定义7.15：若G的顶点v_m满足以下条件．则称v_m为G的**依权h的中位点**：

$$\sum_{i=1}^{n}h(i)d(v_m,v_i)=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}h(i)d(v_k,v_i)$$

并称

$$R_0(h)=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}h(i)d(v_k,v_i)$$

为G的**依权h的中线长**。

若允许中位点出现在G（的边）上，而不限定在顶点上，那么与绝对中心、绝对半径相对应有以下定义。

定义7.16：在G上的点X_0若满足下列条件，则称X_0为G的**绝对中位点**：

$$\sum_{i=1}^{n}h(i)d(X_0,v_i)=\inf_{X\in G}\sum_{i=1}^{n}h(i)d(X,v_i)$$

并称 $R_0=\sum_{i=1}^{n}h(i)d(X_0,v_i)$ 为G的**绝对中线长**。

我们在上一段已经看到绝对半径$r_G\leqslant\rho_G$，而且确实有$r_G<\rho_G$的情况出现，这就是说绝对中心比中心更为优越。因此，自然会预测绝对中位点应比中位点也更好些。然而我们将证明情况并非如此。即中线长恒与绝对中线长一样。

定理7.9：图G＝(V,E)至少有一个顶点v_0是绝对中位点。

证明：设X为G的任一点，证明必有一个顶点v_0使

$$\sum_{i=1}^{n}h(i)\,d(X,v_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}h(i)d(v_0,v_i)$$

假设$X\in e_k=[p,q]$，且顶点的编号满足下列条件：从X到$v_1,v_2,\cdots,v_r$的测地线经由v_p；从X到v_{r+1}，…，v_n的测地线经由v_q。于是

$$d(X,v_i)=\begin{cases} d(X,v_p)+d(v_p,v_i) & 若\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r \\ d(X,v_q)+d(v_q,v_i) & 若\ i=r+1,\ \cdots,\ n \end{cases} \tag{7.39}$$

$$\sum_{i=1}^{n}h(i)d(X,v_i)=\sum_{i=1}^{r}h(i)[d(X,v_p)+d(v_p,v_i)] + \sum_{i=r+1}^{n}h(i)[d(X,v_q)+d(v_q,v_i)] \tag{7.40}$$

不失一般可设

$$\sum_{i=1}^{r}h(i)\geqslant\sum_{i=r+1}^{n}h(i) \tag{7.41}$$

由于$d(X,v_q)=d(v_p,v_q)-d(X,v_p)$从而由式 (7.40) 得

$$\sum_{i=1}^{n}h(i)d(X,v_i)=\sum_{i=1}^{r}h(i)[d(X,v_p)+d(v_p,v_i)] + \sum_{i=r+1}^{n}h(i)[d(v_p,v_q)-d(X,v_p)+d(v_q,v_i)] \tag{7.42}$$

由距离的三角形不等式：

$$d(v_p,v_q)+d(v_q,v_i)\geqslant d(v_p,v_i)$$

可由式 (7.42) 得

$$\sum_{i=1}^{n}h(i)d(X,v_i)\geqslant\sum_{i=1}^{r}h(i)[d(X,v_p)+d(v_p,v_i)] + \sum_{i=r+1}^{n}h(i)[d(v_p,v_i)-d(X,v_p)]$$

将上式右端改变次序得

$$\sum_{i=1}^{n}h(i)d(X,v_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}h(i)\,d(v_p,v_i)+\left[\sum_{i=1}^{r}h(i)-\sum_{i=r+1}^{n}h(i)\right]d(X,v_p) \tag{7.43}$$

由式 (7.41) 可知式 (7.43) 右端第二项非负，故由式 (7.43) 得

$$\sum_{i=1}^{n}h(i)d(X,v_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}h(i)d(v_p,v_i)$$

取$v_o=v_p$，则得证。

习　　题

1. 设$G=(V,\Gamma)$为一有向图，其各弧上单位流的费用函数为凸的，试证以$f_{i,j}$为值的s-t流为最小费用的充分必要条件是没有负的减值回路。

2. 在图7—15中找一个最小费用的极大s-t流。图中每条边上的第一个权表示它的容量，第二个权表示单位流的费用。

3. 试证一个对称的$n\times n$矩阵$\mathscr{D}=(d_{i,j})$，其中$d_{i,j}$都是非负的整数。则它是n个顶点、弧长均为1的图的距离矩阵充分必要条件是

和

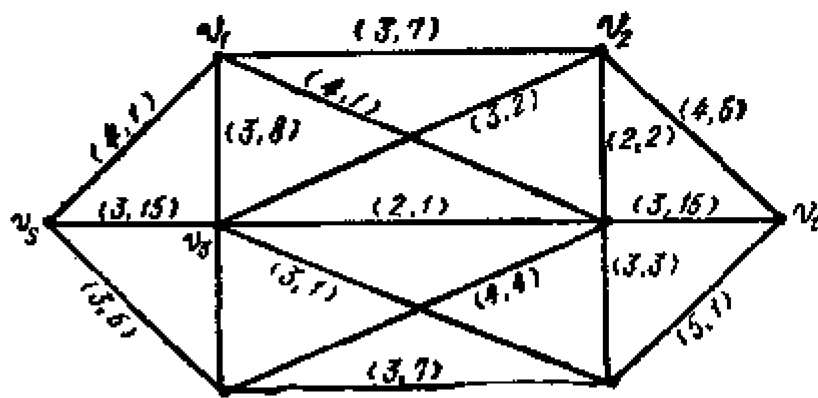


图 7 —15 最小费用的极大流

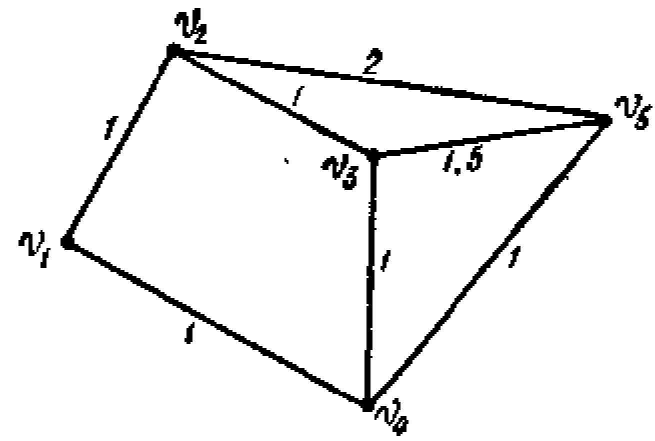


图 7 —16 定址

a) $d_{i,i}=0$, $i=1, 2, \cdots, n$;

b) 对于一切$i, j=1, 2, \cdots, n$和$p=1, 2, \cdots, n$, $d_{i,j}\leq d_{i,p}+d_{p,j}$;

c) 对于每一个使$d_{i,j}>1$的元$d_{i,j}$, 必有一个整数$k<n$, 使$d_{i,k}=1$, $d_{i,j}=d_{i,k}+d_{k,j}$。

4. 试证若$\mathscr{D}$是树T的距离矩阵，且

$$\max_{1\leq i,j\leq n}\{d_{i,j}\}=d_{p,q}$$

则必有 $d(v_p)=d(v_q)=1$，即v_p和v_q的次数为1。

5. 证明每一个 3 × 3 距离矩阵，均可由树实现。

6. 试给出一个 4 × 4 的距离矩阵，可以由树实现的充分必要条件。

7. 对于图 7 —16求：

a) G的距离矩阵$\mathscr{D}$;

b) G的中心v_c;

c) G的中位点v_0;

d) 在$e=[4,3]$边上的局部绝对中心。

符 号 说 明

符号	说明	符号	说明
$A\cdot W\cdot G$	见定义2.19	$m_G(x,y)$, $m_G^{\pm}(A,B)$,	见定义2.5
(A,B)	见定义2.5	$m_G(A,B)$	见定义2.5
$d_G^+(x)$, $d_G^-(x)$, $d_G(x)$	见定义2.6	M_G	见定义2.18
$d(u,v)$	见定义4.2	$P\cdot W\cdot G$	见定义2.19
$dev(A_1)$; $dev(A_1;k)$	见定义4.6	r_G	见定义7.13
$E\cdot W\cdot G$	见定义2.19	S_G, T_G	例2.4
G_A; (A, U_A)	见定义2.13	$\omega^+(A)$, $\omega^-(A)$, $\omega(A)$	见定义2.7
$G_1\cup G_2$, $G_1\cap G_2$	见定义2.26	$\omega-G$	见定义2.19
G_1-G_2, $G_1\Delta G_2$.	见定义2.26	$X_1\sim X_2(mod\,\mathscr{G})$	第六章第七节之三
$G^{(v)}$; $(V, U^{(v)})$	见定义2.29	$\Gamma_1\cdot\Gamma_2$	见定义1.16
G^P	见定义2.31	$\Gamma_1=\Gamma\mid A_1$	见定义1.17
$G_1\times G_2$	见定义2.32	$\Gamma_G^+(v)$, $\Gamma_G^-(v)$, $\Gamma_G(v)$	见定义2.2
$G(c)$	见定义5.1	ρ_1, ρ_G	见定义7.10
$h(G, \mathscr{F})$, $h(\mathscr{F})$	见定义7.1	$\rho_1(h)$, $\rho_G(h)$	见定义7.11
kG	见定义2.27	$\nu(G)$, $\lambda(G)$	见定义3.3
K_n	见定义2.10		
$K_{p,q}$	见定义2.11		
$m_G^+(x,y)$, $m_G^-(x,y)$,	见定义2.5		

内 容 索 引

续上表